DU CALCUL D'AIRE VERS LES PRIMITIVES AVEC GEOGEBRA

L'idée originale de cette activité est l'introduction de la notion de primitive à partir du calcul d'aire. L'objectif est de d'amener les élèves à conjecturer la formule de l'aire $F(b) - F(a)$.

Cet article contient l'activité proposée aux élèves, corrigée en bleu et accompagnée de commentaires pédagogiques.

Deux fichiers sont à télécharger sur le site r2math, il s'agit :

- du fichier de l'activité pour les élèves en format .doc ***23-aire-eleve.doc*** et en format .pdf ***23-aire-eleve.pdf***.
- du fichier GeoGebra ***23-aire.ggb*** à utiliser par les élèves pendant l'activité.

Prérequis : Utilisation de GeoGebra

- Connaître le champ de saisie.
- Construire un polygone et savoir que sa description dans la fenêtre algèbre est son aire.

Il peut être utile de proposer avant cette activité un travail sur les calculs de dérivées avec des fonctions polynômes dont la variable ne s'appelle pas uniquement *x*, mais aussi *t*¸ *b*....

Suite à l'activité, on institutionnalise la notion de primitive. Nous proposons en fin d'article un exercice sur les primitives qui nous semble intéressant.

Remarques :

Ce travail a été testé dans des classes avec les durées suivantes :

Activité : 10 à 15 minutes
Partie 1 - Fonction constante : 30 à 45 minutes
Partie 2 - Fonction linéaire : 20 à 30 minutes
Partie 3 - Une autre fonction : 10 à 20 minutes

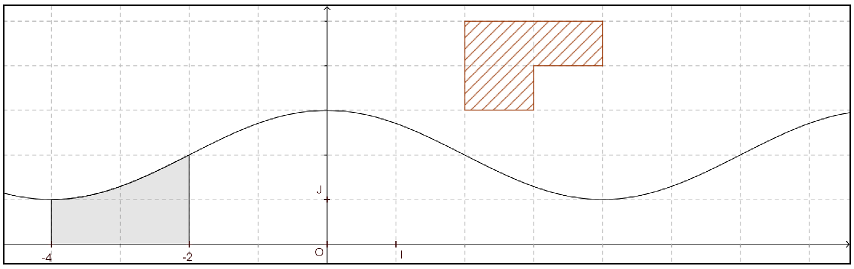
Les notations $F_a(b)$ et $G_a(b)$ se sont révélées difficiles pour les élèves.

Activité

Dans un repère orthogonal, on considère la courbe représentative d'une fonction f, définie et **positive** sur un intervalle contenant les nombres réels a et b ($a \leq b$).

On cherche à calculer l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Définition : Dans un repère orthogonal (O , I , J). On appelle **unité d'aire** l'aire du rectangle OIKJ où K est le point de coordonnées (1 ; 1).



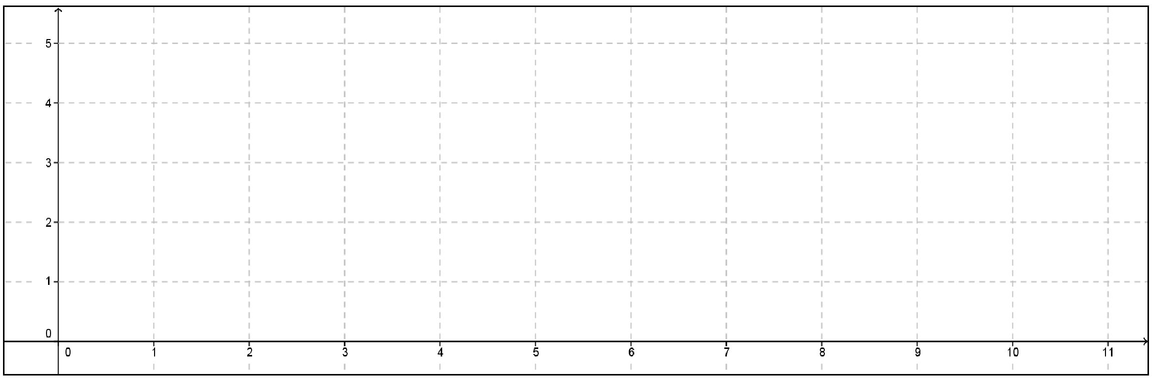
1) Colorier le rectangle OIKJ sur la figure ci-dessus.
2) Quelle est l'aire, en unités d'aire, du domaine hachuré ?
3) Donner une valeur approchée de l'aire du domaine colorié en unités d'aire.
4) Colorier le domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe et les droites d'équations $x = 3$ et $x = 6$, puis donner une valeur approchée de son aire en unités d'aire.

Partie 1 : fonction constante

1) Dans le repère ci-dessous, tracer la courbe C représentant la fonction constante :

$$f : x \longmapsto 3$$

2) Colorier le domaine délimité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.
3) Déterminer l'aire du domaine précédent en unités d'aire.



a et b sont deux nombres réels ($a \leq b$).

$F_a(b)$ est l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. Le résultat précédent est donc $F_0(2)$.

On cherche une formule générale de $F_a(b)$.

$\underline{a = 0}$: Compléter le tableau suivant :

Valeur de b	2	4	5	8	10
$F_0(b)$	6	12	15	24	30

$F_0(b)$ en fonction de b	dérivée de $F_0(b)$ par rapport à b
$3\,b$	3

$\underline{a = 1}$: Compléter le tableau suivant :

Valeur de b	2	4	5	8	10
$F_1(b)$	3	9	12	21	27

$F_1(b)$ en fonction de b	dérivée de $F_1(b)$ par rapport à b
$3\,b - 3$	3

$\underline{a = 2}$: Compléter le tableau suivant :

Valeur de b	2	4	5	8	10
$F_2(b)$	0	6	9	18	24

$F_2(b)$ en fonction de b	dérivée de $F_2(b)$ par rapport à b
$3\,b - 6$	3

On fait constater aux élèves que les fonctions dérivées obtenues sont égales à la fonction initiale *f*.

Si $a = 0$, alors $F_0(b) = 3\,b$

Si $a = 1$, alors $F_1(b) = 3\,b - 3$

Si $a = 2$, alors $F_2(b) = 3\,b - 6$

De façon générale, l'aire en fonction de a et de b est $3\,b - 3\,a = F_a(b)$.

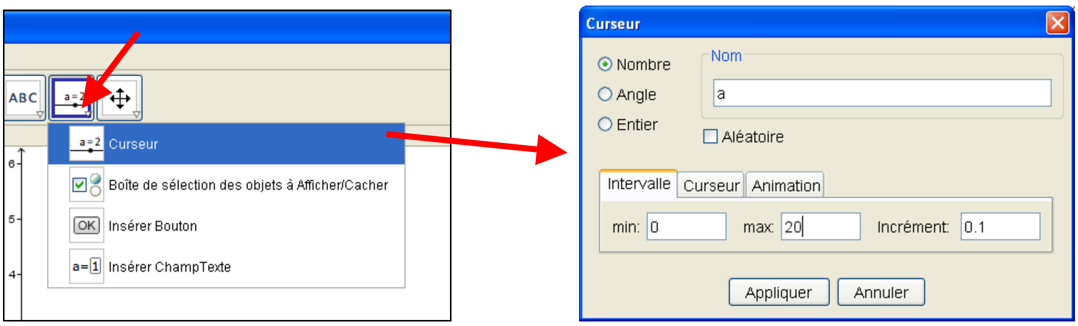
Partie 2 : fonction linéaire

Utilisation du logiciel Geogebra

Lancer GeoGebra et enregistrer le fichier sous le nom *Activité*. Penser à faire des sauvegardes régulières du travail.

1) Tracé de la courbe représentative C de la fonction $g : x \longmapsto 2x$:
   Saisir g(x)=2x dans le champ de saisie.
2) Création d'un curseur a dont le minimum est 0 et le maximum est 20 :

   Sélectionner la commande Curseur de l'avant dernier bouton à droite. Cliquer dans la fenêtre Graphique. Compléter la fenêtre qui s'ouvre :



3) Construction du point A de coordonnées $(a\,;0)$:
   Saisir A=(a,0) dans le champ de saisie.

4) Déplacer le curseur a à la valeur 0, que se passe-t-il pour le point A ?

5) Créer un curseur b dont le minimum est a et le maximum est 20.

6) Construire le point B de coordonnées (b ; 0).

7) Construction des points M et N de la courbe C d'abscisse a et b :

Saisir M=(a,g(a)) dans le champ de saisie.

Saisir N=(b,g(b)) dans le champ de saisie.

8) Tracer le polygone ABNM.

9) On note $G_a(b)$ l'aire du polygone ABNM. On cherche une formule générale de l'aire.

<u>Déplacer le curseur *a* à la valeur 0.</u>

Déplacer le curseur b selon les valeurs du tableau suivant et compléter celui-ci :

Valeur de b	2	4	5	8	10
$G_0(b)$	4	16	25	64	100

$G_0(b)$ en fonction de b	dérivée de $G_0(b)$ par rapport à b
b^2	$2\,b$

Reprendre le travail précédent pour deux autres valeurs de a.

<u>Déplacer le curseur *a* à la valeur 1.</u>

Valeur de b	2	4	5	8	10
$G_1(b)$	3	15	24	63	99

$G_1(b)$ en fonction de b	dérivée de $G_1(b)$ par rapport à b
$b^2 - 1$	$2\,b$

<u>Déplacer le curseur *a* à la valeur 2.</u>

Valeur de b	2	4	5	8	10
$G_2(b)$	0	12	21	60	96

$G_2(b)$ en fonction de b	dérivée de $G_2(b)$ par rapport à b
$b^2 - 4$	$2\,b$

On fait constater aux élèves que les fonctions dérivées obtenues sont égales à la fonction initiale g.

Si $a = 0$, alors $G_0(b) = b^2$

Si $a = 1$, alors $G_1(b) = b^2 - 1$

Si $a = 2$, alors $G_2(b) = b^2 - 4$

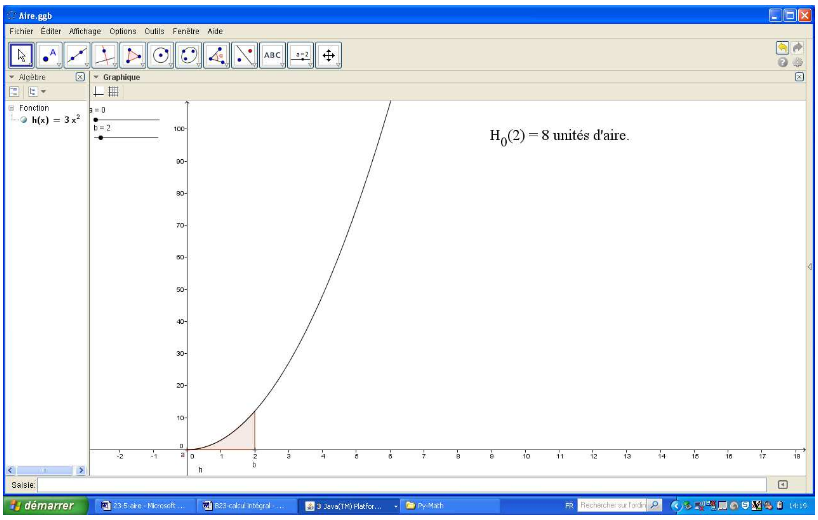
De façon générale, l'aire en fonction de a et de b est $b^2 - a^2 = G_a(b)$.

Partie 3 : Une autre fonction

Ouvrir le fichier GeoGebra *Aire*.

Le graphique donne la représentation C de la fonction $h : x \longmapsto 3x^2$. On note $H_a(b)$ l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Ici le domaine colorié a pour aire $H_0(2) = 8$ unités d'aire.



On cherche une formule générale de l'aire.

<u>Le curseur *a* est à la valeur 0.</u>

Déplacer le curseur b selon les valeurs du tableau suivant et compléter celui-ci :

Valeur de b	2	4	5	8	10
$H_0(b)$	8	64	125	512	1 000

$H_0(b)$ en fonction de b	dérivée de $H_0(b)$ par rapport à b
b^3	$3\,b^2$

Reprendre le travail précédent pour deux autres valeurs de a.

<u>Déplacer le curseur *a* à la valeur 1.</u>

Valeur de b	2	4	5	8	10
$H_1(b)$	7	63	124	511	999

$H_1(b)$ en fonction de b	dérivée de $H_1(b)$ par rapport à b
$b^3 - 1$	$3\,b^2$

<u>Déplacer le curseur *a* à la valeur 2.</u>

Valeur de b	2	4	5	8	10
$H_2(b)$	0	56	117	504	992

$H_2(b)$ en fonction de b	dérivée de $H_2(b)$ par rapport à b
$b^3 - 8$	$3\,b^2$

On fait constater aux élèves que les fonctions dérivées obtenues sont égales à la fonction initiale h.

Si $a = 0$, alors $H_0(b) = b^3$

Si $a = 1$, alors $H_1(b) = b^3 - 1$

Si $a = 2$, alors $H_2(b) = b^3 - 8$

De façon générale, l'aire en fonction de a et de b est $b^3 - a^3 = H_a(b)$.

Pour déterminer l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative d'une fonction positive f et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ ($a \leq b$), on cherche une fonction F telle que $F' = f$.

L'aire est alors $F(b) - F(a)$.

On dit que F est une **primitive** de f.

Exemple :

On cherche l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la représentation graphique de $f : x \longmapsto 4\,x^3$ et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

Une primitive de f est $F : x \longmapsto x^4$

L'aire cherchée est $F(4) - F(2) = 4^4 - 2^4 = 240$ unités d'aire.

Un exercice sur les primitives

Associer les fonctions F et f en complétant les cases vides si nécessaire.

F définie par	est une primitive de	f définie par
$F(x) = 3x - 1$ •		• $f(x) = 3x^2$
$F(x) = 3x + 7$ •		• $f(x) = e^x$
$F(x) = x^2$ •		• $f(x) = x$
$F(x) = x^2 + 5x$ •		• $f(x) = 2x$
$F(x) = x^3 - 5x$ •		• $f(x) = 3$
$F(x) = \ln(x) + 1$ •		• $f(x) = x^2$
$F(x) =$ •		• $f(x) = 3x^2 - 5$
$F(x) =$ •		• $f(x) =$
$F(x) =$ •		• $f(x) =$
$F(x) =$ •		• $f(x) =$