

INTERVALLES DE FLUCTUATION EN PREMIÈRE

SÉANCE TICE

Les objectifs de cette séance sont :

- d'introduire la notion d'intervalle de fluctuation à partir d'une loi binomiale,
- de faire le lien avec l'intervalle de fluctuation vu en seconde,
- d'utiliser la calculatrice à travers la programmation d'un algorithme,
- d'utiliser le module de *Calculs de probabilités* de GeoGebra 4.

Situation

Le lendemain d'une élection, on note que le candidat L. a été élu avec 51,6 % des voix.

On s'interroge après coup sur les prévisions qu'auraient pu donner des sondages, avant l'élection, sur des échantillons de 50 personnes issus dans la population des votants.

On réalise, à l'aide de la calculatrice, la simulation d'échantillons de 50 votants interrogés.

On note f_{obs} la fréquence d'individus votant pour L.

Voici l'algorithme de la simulation :

Variables	N, I, K entiers naturels
Initialisation	N=0
Traitement	Pour I allant de 1 jusqu'à 50 - K prend la valeur d'un nombre tiré de manière aléatoire dans une population constituée de nombres égaux à 0 ou à 1 et dont la proportion de 1 est de 0,516. - N prend la valeur N+K Fin du Pour Afficher N

Et les programmations en langage machine :

TI

```
PROGRAM: INTER
: 0 → N
: For( I, 1, 50 )
: partEnt( NbrAléa
t+.516 ) → K
: N+K → N
: End
: Disp N
```

CASIO

```
=====INTER=====
0 → Ne
For 1 → I To 50
Int (Ran# + 0.516) → Ke
N+K → Ne
Next
N
COMPTL JUMP ?
```

Déroulement de la séance

1. Simulation

Chaque élève exécute trois fois le programme précédent et consigne ses résultats dans un tableau dont la forme est donnée ci-dessous :

Échantillon	Nombre de votants en faveur de L.	f_{obs}	Commentaires
n° 1			
n° 2			
n° 3			

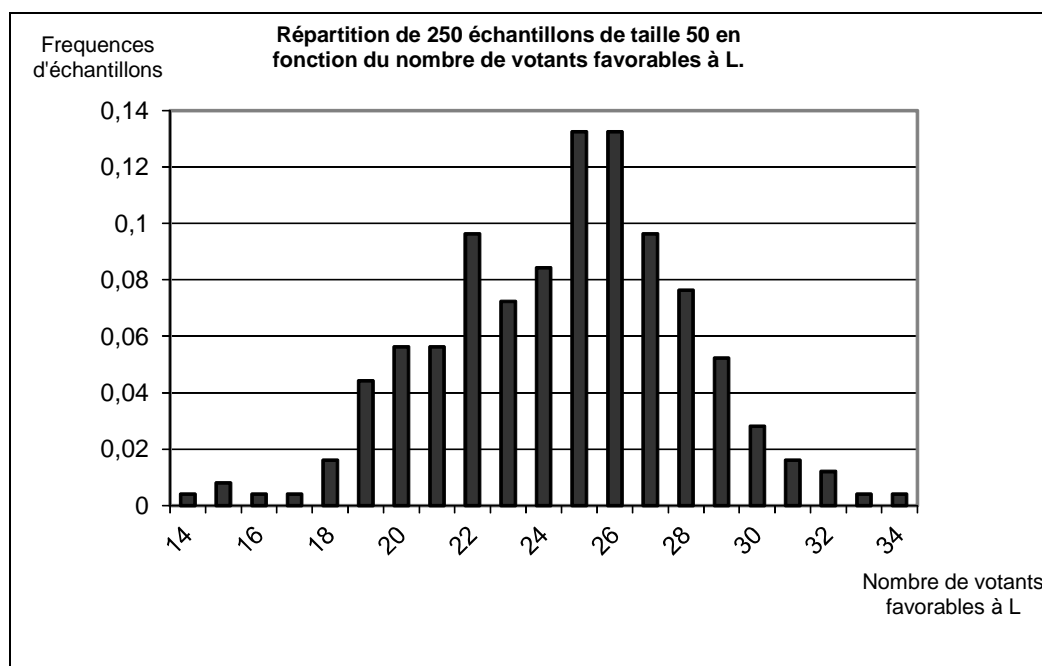
2. Mutualisation

On mutualise les résultats de 250 échantillons construits par les élèves de la classe.

Voici un exemple de simulation avec 250 échantillons de taille 50 réalisé avec un tableur.

Nombre de voix en faveur du candidat L. dans l'échantillon	Effectif	Fréquence
14	1	0
15	0	0
16	2	0,01
17	4	0,02
18	7	0,03
19	8	0,03
20	12	0,05
21	15	0,06
22	19	0,08
23	30	0,12
24	23	0,09
25	33	0,13
26	25	0,1
27	23	0,09
28	18	0,07
29	13	0,05
30	5	0,02
31	3	0,01
32	4	0,02
33	2	0,01
34	3	0,01
Total	250	

La répartition des fréquences donnée dans le tableau précédent est présentée ci-dessous (le graphique pourra être réalisé en classe par les élèves).



3. Modélisation

On modélise ensuite l'expérience à l'aide d'une loi binomiale.

On note X , la variable aléatoire qui compte le nombre de votants en faveur de L. dans l'échantillon de 50 personnes interrogées.

Il s'agit d'un schéma de Bernoulli. On réalise 50 fois l'expérience qui consiste à choisir un individu au hasard et à lui demander s'il est en faveur de L.

On appelle "Succès" l'événement "L'individu répond OUI" de probabilité $p = 0,516$.

Les 50 épreuves sont identiques et indépendantes.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donc la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,516$.

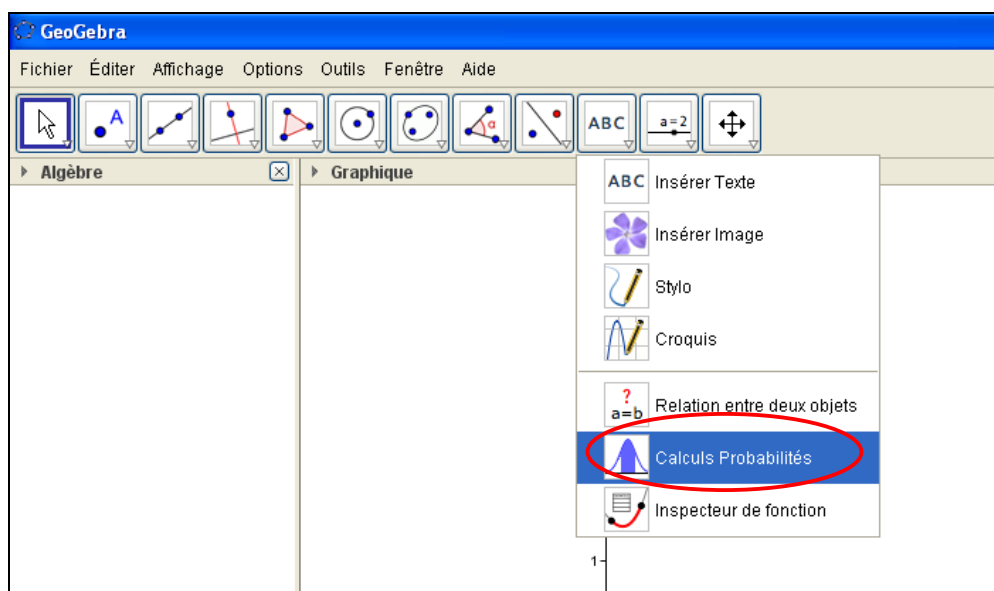
Les élèves complètent le tableau suivant et comparent les résultats obtenus avec les fréquences observées de l'expérimentation.

Nombre de votants favorables à L. (x_i)	$P(X = x_i)$
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	
22	
23	
24	

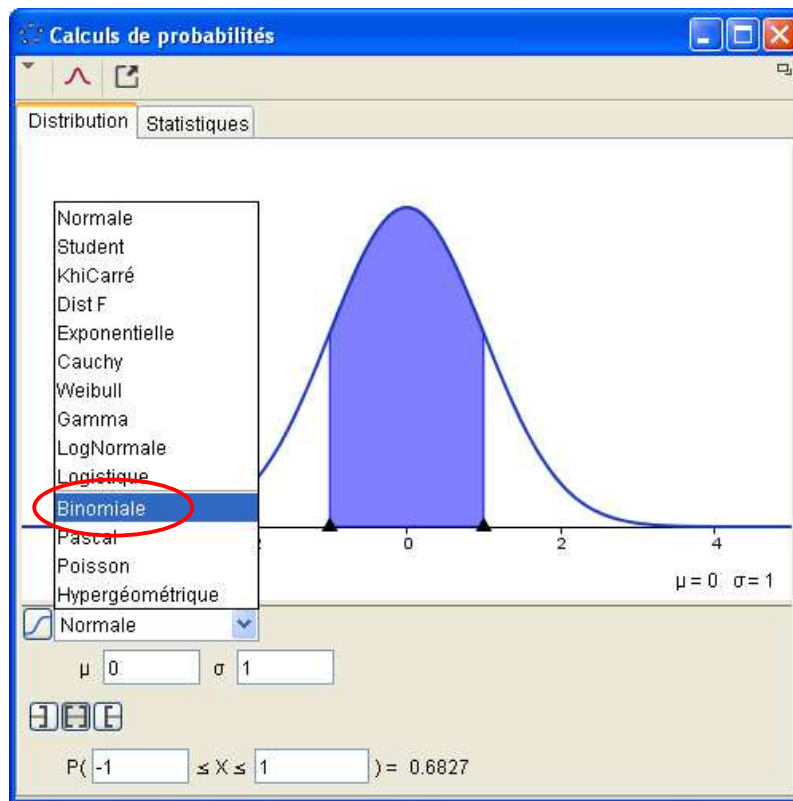
Nombre de votants favorables à L. (x_i)	$P(X = x_i)$
25	
26	
27	
28	
29	
30	
31	
32	
33	
34	

4. Utilisation du module Calculs de probabilités de GeoGebra 4

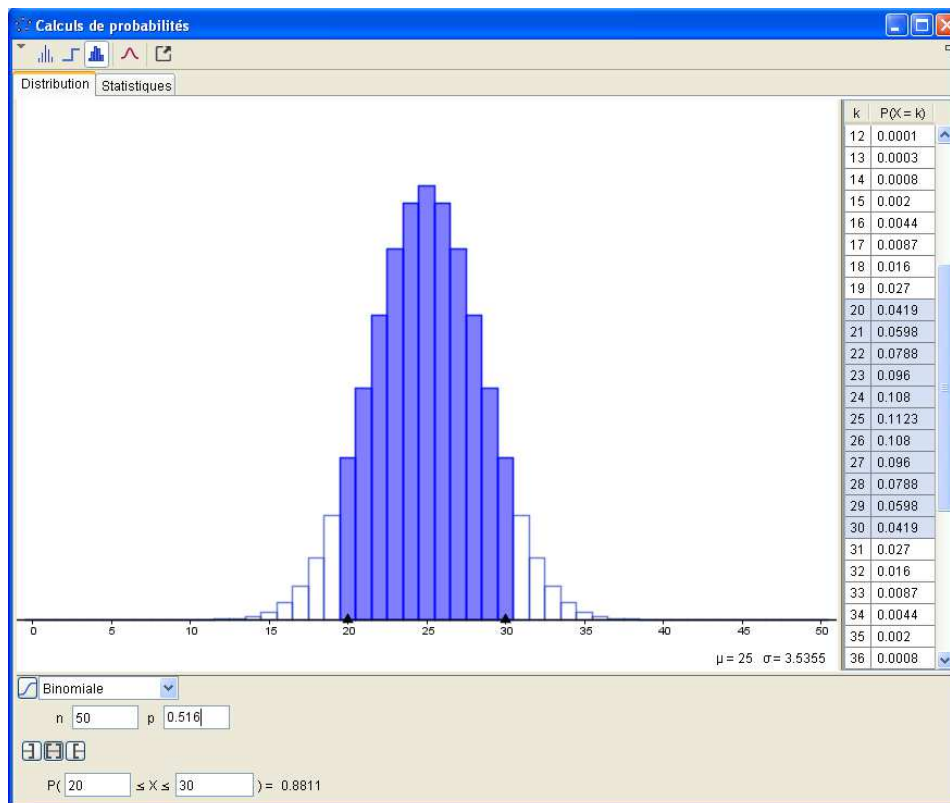
- Ouvrir la commande *Calculs Probabilités*.



- Dans la rubrique *Distributions*, sélectionner *Binomiale*, saisir les paramètres de la loi de la variable X.



- On peut ensuite obtenir des probabilités du type $P(X \leq a)$, $P(X \geq b)$ ou $P(a \leq X \leq b)$ comme cela apparaît sur la saisie d'écran suivante.



5. Vers l'intervalle de fluctuation à un seuil donné de la fréquence d'échantillonnage

Définition (programme de Seconde Générale)


L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % relatif aux échantillons de taille n , est l'intervalle centré autour de p , proportion du caractère dans la population, où se situe, avec une probabilité égale à 0,95, la fréquence observée f_{obs} dans un échantillon de taille n .

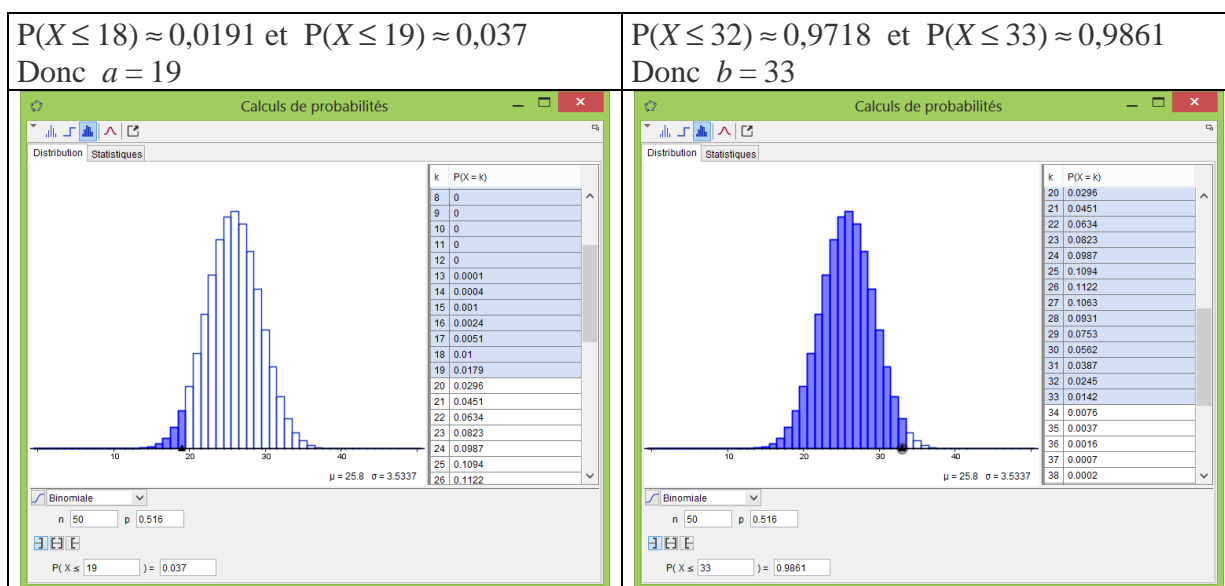
Intervalle de fluctuation avec une loi binomiale (document de ressources en statistique et probabilités, classes de Premières Générales et Technologique)

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % d'une fréquence F , correspondant à la réalisation, sur un échantillon aléatoire de taille n , de la variable aléatoire X égale à nF et de loi binomiale de paramètres n et p , est l'intervalle $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$, défini par le système de conditions suivant :

- a est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0,025$,
- b est le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$.

Les élèves cherchent alors entre quelles valeurs se trouve X pour 95 % des échantillons.

Avec GeoGebra 4, on sélectionne l'icône *Probabilités à gauche* , puis on déplace le curseur qui se trouve sur l'axe des abscisses pour obtenir les valeurs de a et de b .



Alors l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence observée est $\left[\frac{a}{50}; \frac{b}{50}\right]$ soit $\left[\frac{19}{50}; \frac{33}{50}\right] = [0,38; 0,66]$.

Remarque :

En classe de Seconde, pour $n \geq 25$ et p compris entre 0,2 et 0,8, on a vu qu'une approximation de l'intervalle de fluctuation au seuil de 0,95 de la fréquence observée est $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

Ce qui, ici, donnerait $[0,3746; 0,6574]$.

On constate que les deux intervalles obtenus sont proches.