# LE COIN DU DEBUTANT

Nous vous proposons dans ce bulletin les corrigés de deux exercices de statistique proposés lors d'épreuves terminales dans des filières de BTSA.

SESSION 1997
France métropolitaine - Réunion - Mayotte
BTSA toutes options rénovées

<u>EXERCICE **2**</u> **(** 7 **points)**
Une coopérative agricole commercialise des sacs de grains d'une masse nominale de 50 kg. En réalité la masse d'un sac exprimée en kg, est distribuée suivant la loi normale de moyenne $\mu$ = 50 et d'écart-type $\sigma$ inconnu.
1°) De nombreuses mesures ont montré que 95% des sacs ont une masse comprise entre 48 kg et 52 kg.
Déterminer $\sigma$.
2°) On constitue à la livraison des lots de 40 sacs. Chaque lot peut être considéré comme un échantillon de taille 40 tiré au hasard dans la production.
On désigne par $\overline{X}$ la variable aléatoire prenant pour valeur la masse moyenne d'un sac dans un lot de 40 sacs. Justifier que la distribution de $\overline{X}$ est la loi normale de moyenne 50 et d'écart-type 0, 161 à $10^{-3}$ près.
3°) a - Quelle est la probabilité que la masse moyenne d'un lot de 40 sacs soit inférieure à 49,5 kg ?
b - Quelle est la probabilité que cette masse moyenne soit comprise entre 49,6 Kg et 50,4 kg ?
4°) Le contrat liant le fournisseur et un client stipule que la masse moyenne d'un lot doit être au moins de 50 kg.
En supposant que l'écart-type $\sigma$ reste constant, quelle devra être la nouvelle moyenne $\mu'$ des sacs au conditionnement pour remplir ce contrat avec une probabilité de 0,99 ?

---

<u>Remarque</u> : d'un point de vue statistique la première question est discutable. Mal interprétée par des étudiants, elle peut être prise, à tort évidemment, pour une méthode d'estimation des paramètres d'une loi normale et induire ainsi de fausses idées sur la théorie de l'estimation. En fait cette question prend prétexte de la loi normale pour proposer un problème algébrique classique de mise en équation débouchant sur la résolution d'une équation du premier degré.

---

**Proposition de corrigé.**

1°) <u>Déterminer $\sigma$.</u>
Notons $X$ la variable aléatoire qui prend pour valeur la masse, exprimée en kg, d'un sac de grains tiré au hasard.
$X$ est distribuée selon la loi normale $N(\mu,\sigma)$ de moyenne $\mu$ = 50 et d'écart-type inconnu $\sigma$.
Donc la variable aléatoire $U$, définie par $U = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ soit $U = \dfrac{X-50}{\sigma}$, est de loi normale $N(0 ; 1)$,

$P(48 \leq X \leq 52) = 0{,}95$

$x_1 = 48$ donc $u_1 = \dfrac{48-50}{\sigma}$ soit $u_1 = -\dfrac{2}{\sigma}$

$x_2 = 52$ donc $u_2 = \dfrac{52-50}{\sigma}$ soit $u_2 = \dfrac{2}{\sigma}$

$$\begin{aligned}
P(48 \leq X \leq 52) = 0{,}95 \quad &\Leftrightarrow \quad P\left(\frac{48-50}{\sigma} \leq U \leq \frac{52-50}{\sigma}\right) = 0{,}95\\
&\Leftrightarrow \quad P\left(-\frac{2}{\sigma} \leq U \leq \frac{2}{\sigma}\right) = 0{,}95\\
&\Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right) = 0{,}95\\
&\Leftrightarrow \quad 2\times\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) - 1 = 0{,}95\\
&\Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) = 0{,}975
\end{aligned}$$

La lecture de la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite fournit $\Phi(1{,}96) = 0{,}95$ d'où $\dfrac{2}{\sigma} = 1{,}96$ soit $\boxed{\sigma = 1{,}02.}$

2°) <u>Loi de probabilité de $\overline{X}$</u> .

On utilise le théorème fondamental d'échantillonnage de la moyenne :

> Soit $\overline{X}$ la moyenne empirique de l'échantillon aléatoire $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de taille $n$ de la variable aléatoire $X$ :
>
> si la variable aléatoire $X$ est distribuée selon la loi normale $N(\mu, \sigma)$, alors la moyenne $\overline{X}$ est distribuée selon la loi normale $N(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$ .

Dans notre exemple :

$$\boxed{\overline{X} \text{ est distribuée selon la loi } N(50\,;\frac{1.02}{\sqrt{40}}) \text{ soit } N(50\,;0{,}161).}$$

3°) a) <u>Probabilité que la masse moyenne d'un lot soit inférieure à 49,5 kg ?</u>

D'après la question 2, la variable aléatoire $U$, définie par $U = \dfrac{\overline{X}-50}{0{,}161}$, est de loi normale $N(0\,;1)$.

si $\overline{x} = 49{,}5$ alors $u = \dfrac{49{,}5-50}{0{,}161}$ soit $u = -3{,}11$

$P(\overline{X} \leq 49{,}5) = P(U \leq -3{,}11)$

$P(\overline{X} \leq 49{,}5) = \Phi(-3{,}11)$

$P(\overline{X} \leq 49{,}5) = 1 - \Phi(3{,}11)$

$P(\overline{X} \leq 49{,}5) = 1-0{,}9990$

$P(\overline{X} \leq 49{,}5) = 0{,}0010$

| |
|---|
| La probabilité que la masse moyenne d'un lot soit inférieure à 49,5 est égale à 0,0010. |

b) <u>Probabilité que la masse moyenne soit comprise entre 49,6 Kg et 50,4 kg ?</u>

si $\bar{x} = 49{,}6$ alors $u = \dfrac{49{,}6 - 50}{0{,}161}$ soit $u = -2{,}48$ à $10^{-2}$ près

si $\bar{x} = 50{,}4$ alors $u = \dfrac{50{,}4 - 50}{0{,}161}$ soit $u = 2{,}48$ à $10^{-2}$ près

$P(49{,}6 \leq \overline{X} \leq 50{,}4) = \Phi(2{,}48) - \Phi(-2{,}48)$

$P(49{,}6 \leq \overline{X} \leq 50{,}4) = 2\times\Phi(2{,}48)-1$

$P(49{,}6 \leq \overline{X} \leq 50{,}4) = 2\times 0{,}9934-1$

$P(49{,}6 \leq \overline{X} \leq 50{,}4) = 0{,}9868$

| |
|---|
| La probabilité que la masse moyenne soit comprise entre 49,6 Kg et 50,4 Kg est égale à 0,9868 |

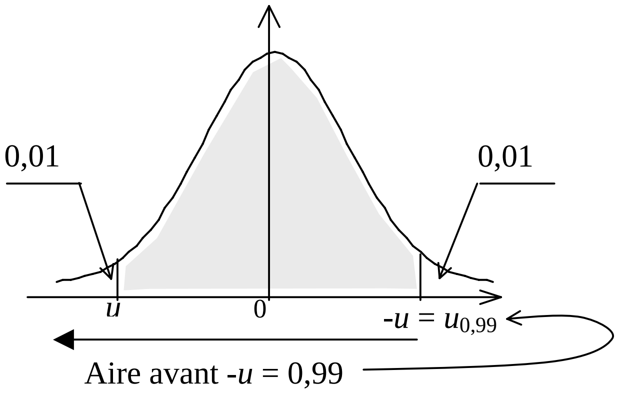
4°) <u>Quelle devra être la nouvelle moyenne μ' des sacs au conditionnement ?</u>

$\overline{X}$ est distribuée selon la loi $N(\mu' \,;\, 0{,}161)$ donc la variable aléatoire $U$, définie par $U = \dfrac{\overline{X} - \mu'}{0{,}161}$, est de loi normale $N(0 \,;\, 1)$,

$P(\overline{X} \geq 50) = 0{,}99$, l'aire sous la courbe normale après 50 est égale à 0,99 donc $\mu' \geq 50$,

à $\bar{x} = 50$ correspond $u = \dfrac{50 - \mu'}{0{,}161}$, $u < 0$

$$
\begin{aligned}
P(\overline{X} \geq 50) = 0{,}99 \quad &\Leftrightarrow \quad P(\overline{X} \leq 50) = 0{,}01\\
&\Leftrightarrow \quad P(U \leq u) = 0{,}01\\
&\Leftrightarrow \quad \Phi(u) = 0{,}01\\
&\Leftrightarrow \quad \Phi(-u) = 0{,}99
\end{aligned}
$$




- $u$ est le fractile $u_{0,99}$ de la loi normale centrée réduite.
On lit dans la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite : $u_{0,99} = 2,33$
$-u = 2,33$ soit $u = -2,33$
or $u = \dfrac{50 - \mu'}{0,161}$ donc $\dfrac{50 - \mu'}{0,161} = -2,33$
$\mu' = 50 + 2,33 \times 0,161$
$\mu' = 50,38$, à $10^{-2}$ près.

| La nouvelle moyenne $\mu'$ des sacs au conditionnement est égale à 50,38 |
|---|

---

SESSION 1998
France métropolitaine - Réunion - Mayotte
BTSA toutes options rénovées

**Exercice** 2 (7 points)
Une entreprise commercialise des boîtes de lait dont la contenance nominale inscrite sur l'emballage est de 1 litre. On suppose que le volume de lait, exprimé en litres, versé dans une boîte est une variable aléatoire X distribuée suivant une loi normale de moyenne $\mu$ et d'écart-type donné égal à 0,006. La moyenne est obtenue par réglage de la machine sur la valeur "$\mu$".
l) On règle la machine sur la valeur $\mu = 1,01$.

a) Quel est le pourcentage de boîtes dont le volume de lait sera inférieur à un litre ?
b) Pour vérifier que la machine est bien réglée, on prélève au hasard, toutes les heures, un échantillon de 9 boîtes. On calcule la moyenne $\bar{x}$ des volumes de lait contenu dans les 9 boîtes de cet échantillon.

On désigne par $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon, associe sa moyenne $\bar{x}$.
Quelle est la loi de probabilité de $\overline{X}$ ?
Donner l'espérance mathématique et l'écart-type de $\overline{X}$.

Quelle est la probabilité que la moyenne sur un échantillon de 9 boîtes soit inférieure à 1,005 litres ?

2) Les volumes, exprimés en litres, de 9 boîtes d'un échantillon prélevé au hasard sont les suivants : 0,998 1,012 1,005 0,995 1,014 1,007 1,006 1,000 1,008.

Donner une estimation de la moyenne $\mu$ par intervalle de confiance au niveau 0,95 en justifiant la démarche et les résultats.

---

Remarque : La première question de l'énoncé nourrit la confusion entre pourcentage et probabilité. Il aurait été préférable de libeller la question sous la forme suivante : "Quelle est la probabilité qu'une boîte prélevée au hasard ait un volume de lait inférieur à un litre ?".

---

**Proposition de corrigé.**

1) a) On règle la machine sur la valeur $\mu = 1{,}01$, X est distribuée selon la loi normale $N(\mu\,;\,\sigma)$ où $\mu = 1{,}01$ et $\sigma = 0{,}006$.
X est distribuée selon la loi normale $N(1{,}01\,;\,0{,}006)$ donc la variable aléatoire $U$, définie par $U = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ soit $U = \dfrac{X - 1{,}01}{0{,}006}$, est de loi normale $N(0\,;\,1)$

Calcul de la probabilité $P(X \leq 1)$ qu'une boîte ait un volume inférieure à un litre.
si $x = 1$ alors $u = \dfrac{1-1{,}01}{0{,}006}$ soit $u = -1{,}67$ à $10^{-2}$ près

$P(X \leq 1) = P(U \leq -1{,}67)$
$P(X \leq 1) = \Phi(-1{,}67)$

$P(X \leq 1) = 1 - \Phi(1{,}67)$

$P(X \leq 1) = 1 - 0{,}9525$

$P(X \leq 1) = 0{,}0475$

| La probabilité qu'une boîte ait un volume inférieur à un litre est égale à 0,0475 |
|---|

b) <u>Loi de probabilité de $\overline{X}$</u>.

On utilise le théorème fondamental d'échantillonnage de la moyenne.

Soit $\overline{X}$ la moyenne empirique de l'échantillon aléatoire $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de taille $n$ de la variable aléatoire $X$ :
si la variable aléatoire $X$ est distribuée selon la loi normale $N(\mu,\sigma)$, alors la moyenne $\overline{X}$ est distribuée selon la loi normale $N(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Dans notre exemple :

| $\overline{X}$ est distribuée selon la loi $N(1{,}01\,;\,\dfrac{0{,}006}{\sqrt{9}})$ soit $N(1{,}01\,;\,0{,}002)$. |
|---|

| <u>Espérance mathématique et écart-type de $\overline{X}$</u> : | $E(\overline{X}) = 1{,}01$<br>$\sigma(\overline{X}) = 0{,}002$ |
|---|---|

Calcul de la probabilité $P(\overline{X} \leq 1{,}005)$ que la moyenne sur un échantillon de 9 boîtes soit inférieure à 1,005 litres :

D'après ce qui précède, la variable aléatoire $U$, définie par $\mathrm{U} = \dfrac{\overline{\mathrm{X}} - \mu}{\sigma(\overline{\mathrm{X}})}$ soit $U = \dfrac{\overline{X} - 1{,}01}{0{,}002}$,

est de loi normale $N(0\,;\,1)$.

Si $\overline{x} = 1{,}05$ alors $u = \dfrac{1{,}005 - 1{,}01}{0{,}002}$ soit $u = -2{,}5$

$P(\overline{X} \leq 1{,}005) = P(U \leq -2{,}5)$
$P(\overline{X} \leq 1{,}005) = \Phi(-2{,}5)$
$P(\overline{X} \leq 1{,}005) = 1 - \Phi(2{,}5)$
$P(\overline{X} \leq 1{,}005) = 1 - 0{,}9938$

$P(\overline{X} \leq 1{,}005) = 0{,}0062$

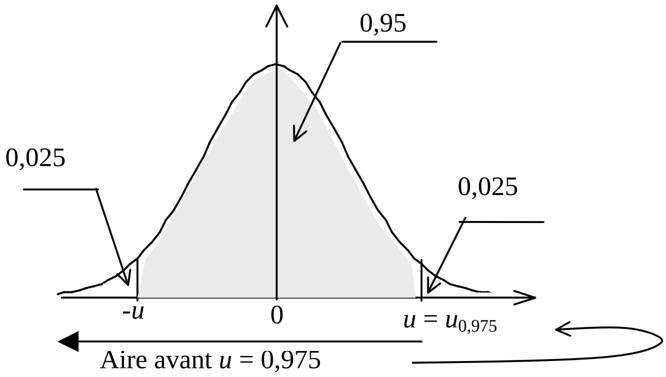
| |
|---|
| La probabilité que la moyenne sur un échantillon de 9 boîtes soit inférieure à 1,005 litres est égale à 0,0062 |

2) <u>Intervalle de confiance à 95% de la moyenne</u>.

La variance $\sigma^2$ est connue donc $\overline{X}$ est distribuée selon la loi normale $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, et la variable aléatoire $U$, définie par $\dfrac{(\overline{X} - \mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, est distribuée selon la loi normale $N(0\ ;\ 1)$.

Détermination de l'intervalle de confiance <u>aléatoire</u> au niveau 95% :

$P(-u \leq U \leq u) = 0{,}95$ pour u = 1,96




$u$ est le fractile $u_{0,975}$ de la loi normale centrée réduite.
On lit dans la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite : $u_{0,975} = 1{,}96$

$P(-1{,}96 \leq U \leq 1{,}96) = 0{,}95 \quad \Leftrightarrow \quad P(1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{X} - \mu \leq 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 0{,}95$

$\Leftrightarrow \quad P(\overline{X} - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 0{,}95$

D'où l'intervalle de confiance aléatoire à 95% :

$[\overline{X} - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{X} + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$ soit $[\overline{X} - 1{,}96 \times 0{,}002\ ;\ \overline{X} + 1{,}96 \times 0{,}002]$

$[\overline{X} - 0{,}004\ ;\ \overline{X} + 0{,}004]$

Détermination d'un intervalle de confiance à 95% :

L'échantillon prélevé a pour moyenne $\overline{x} = 1{,}005$

| |
|---|
| $\overline{x} = 1{,}005$ est la valeur observée de la variable aléatoire $\overline{X}$ sur l'échantillon d'où l'intervalle de confiance correspondant à l'échantillon prélevé : [1,001 ; 1,009] |

- = - = - = - = - = - = - = - = -