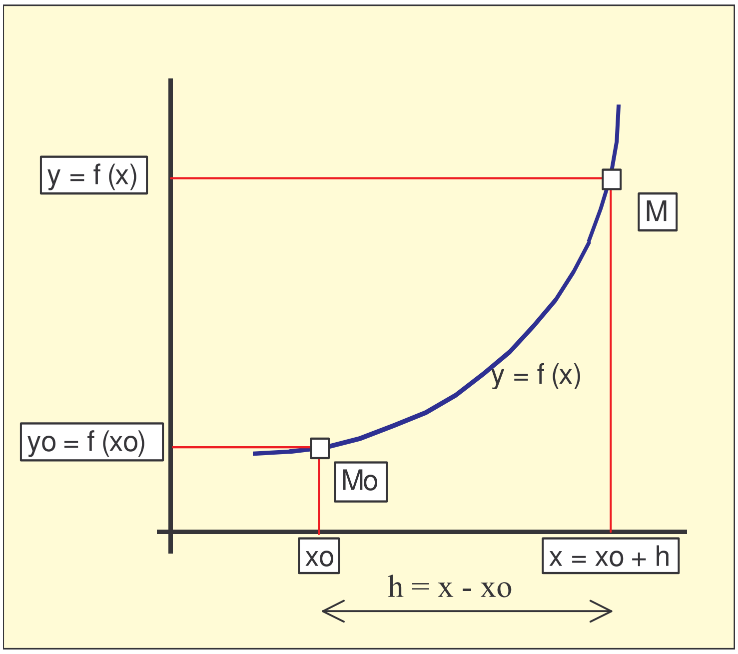
De la notion de nombre dérivé à celle de fonction dérivée, en utilisant un tableur.[1]

I. Le nombre dérivé de f en x_o

La fonction f
On part d'une fonction simple, familière aux élèves, la fonction "carré" :

$f : x \mapsto x^2$, définie sur R.

Le point M_o
On choisit une valeur particulière x_o de la variable donc un point particulier M_o (x_o ; $f(x_o)$) de la courbe C_f représentative de la fonction f.



Le point M
Pour obtenir un autre point noté M, de la courbe C_f, on s'écarte "un peu" du point M_o, soit vers la droite soit vers la gauche, en choisissant un "écart initial" h (soit positif soit négatif).
Le point M a pour abscisse $x = x_o + h$ et puisqu'il appartient à la courbe C_f, son ordonnée y est l'image de x par la fonction f donc $y = f(x) = f(x_o + h)$.

<u>Question :</u> Que se passe t-il si l'on choisit un écart *h* de plus en plus proche de zéro[2] ?

L'application réalisée avec le tableur[3] permet de "voir" :

- lorsque x tend vers x_o ce qu'il advient de x , de $f(x)$ $\left[\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \right]$,
- mais surtout, comment évolue le coefficient directeur a de la droite (M_oM) [quand h tend vers zéro donc quand x tend vers x_o, le coefficient directeur de la sécante (M_oM) tend vers un nombre que l'application informatique permet d'entrevoir…].

L'usage de l'application informatique permet de conjecturer la valeur du nombre dérivé de f en x_o ; si de plus, on inclut une représentation graphique, on constate qu'au voisinage de x_o les points obtenus **semblent** presque alignés et ce d'autant plus que l'écart initial (et consécutivement ceux que l'on choisit ensuite !) est faible. En prenant pour écart initial, des valeurs de plus en plus proches de zéro, on simule un effet de "zoom"[4] et très vite, le morceau de parabole se confond avec un segment de droite[5]. "De quelle droite s'agit-il ?", telle pourrait être la question !

On trouvera ci-après un jeu d'essai de l'application informatique proposée ainsi que quelques indications permettant sa réalisation.

---

[1] Le tableur est MICROSOFT EXCEL 97 mais les formules sont transférables dans tout autre tableur.
[2] Évitons l'expression "de plus en plus PETIT".
[3] Cette application est récupérable sur EDUCAGRI (voir PY-MATH n° 3) dans la conférence MATH-INFO nouvellement créée. Si l'usage de ce système ne vous est pas familier, sollicitez l'aide d'un collègue.
[4] Voir le document donné en annexe.
[5] La fonction ZOOM (en particulier l'option BOX) des calculatrices graphiques permet de semblables observations.

Fonction $f : x \mapsto x^2$

Valeurs à saisir.
Toutes les autres valeurs sont calculées.

Données initiales	
xo =	3
Ecart initial	0,1

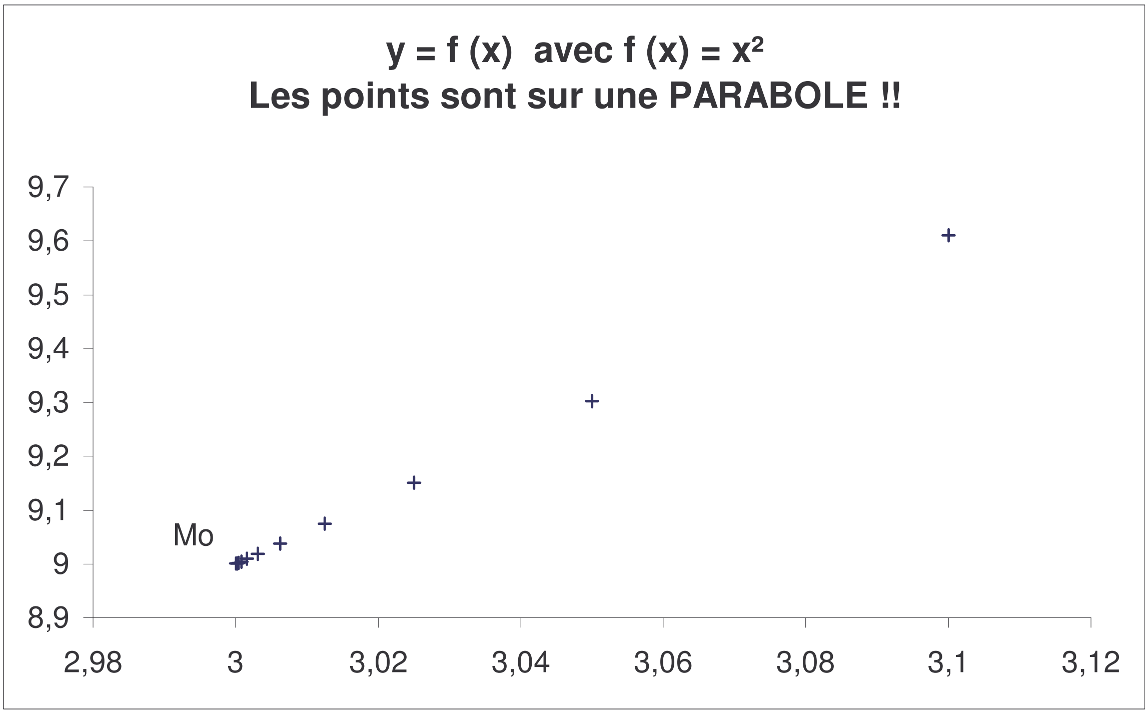
Point d'étude Mo	
xo	yo = f (xo)
3	9

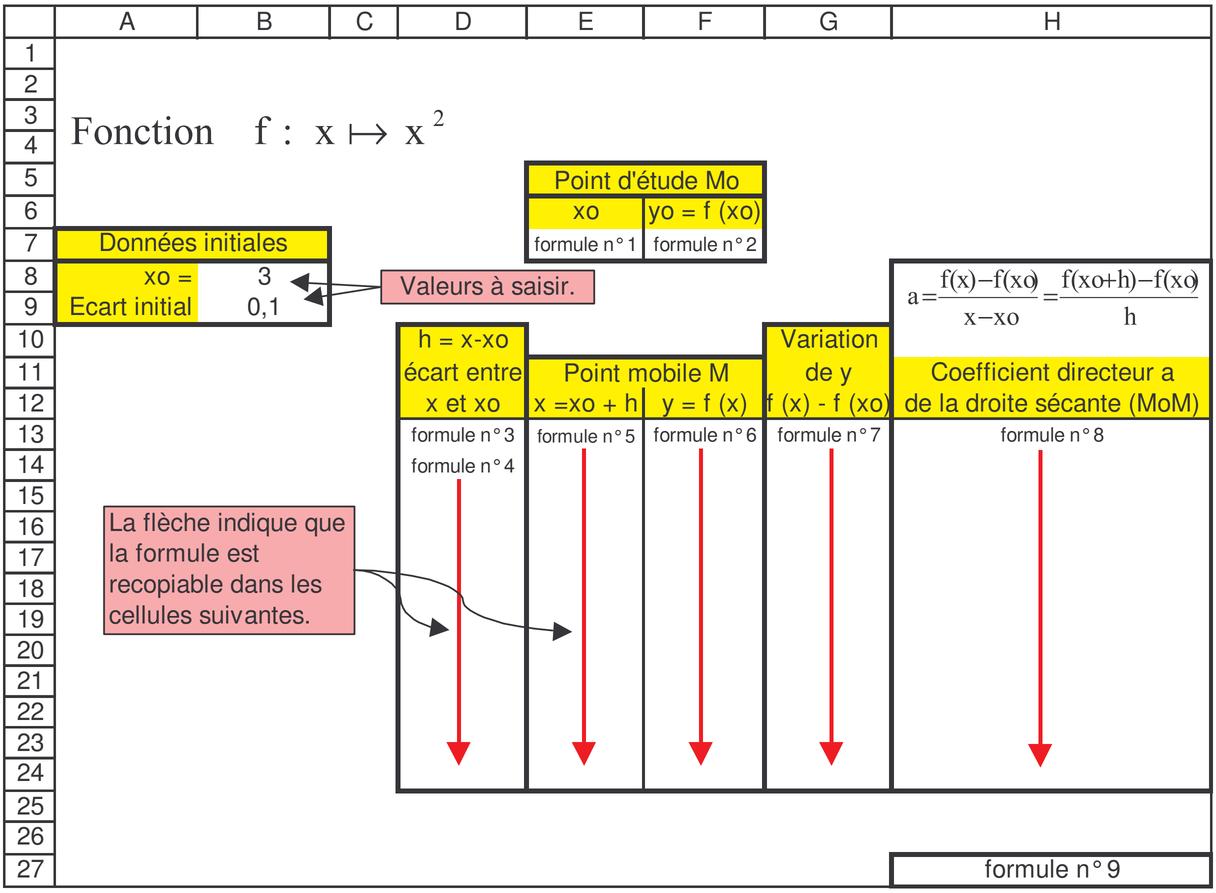
NB :
1. Eviter de prendre en premier xo = 2 car alors f (xo) = f ' (xo)
2. L'écart initial peut être négatif.
   * si cet écart est positif, alors x > xo.
   * si cet écart est négatif, alors x < xo.

h = x-xo écart entre x et xo	Point mobile M x =xo + h	y = f (x)	Variation de y f (x) - f (xo)	$a=\frac{f(x)-f(xo)}{x-xo}=\frac{f(xo+h)-f(xo)}{h}$ Coefficient directeur a de la droite sécante (MoM)
0,1000	3,1	9,61	0,61	6,1
0,0500	3,05	9,3025	0,3025	6,05
0,0250	3,025	9,150625	0,150625	6,025
0,0125	3,0125	9,0751563	0,0751563	6,0125
0,0063	3,00625	9,0375391	0,0375391	6,00625
0,0031	3,003125	9,0187598	0,0187598	6,003125
0,0016	3,001563	9,0093774	0,0093774	6,0015625
0,0008	3,000781	9,0046881	0,0046881	6,00078125
0,0004	3,000391	9,0023439	0,0023439	6,000390625
0,0002	3,000195	9,0011719	0,0011719	6,000195312
1E-04	3,000098	9,0005859	0,0005859	6,000097656

Les valeurs successives de l'écart h = x - xo sont divisées à chaque fois par un nombre constant (ici 2) ; il peut être intéressant sur le plan pédagogique de supprimer cet automatisme et de saisir des valeurs de h arbitrairement de plus en plus proches de 0.
On peut enfin tenter la valeur xo = 0....

f ' (xo) = 6





Quelques indications !!

	Sans nommer des cellules !		En nommant des cellules.	
	Elémentaires	Plus élaborées	Elémentaires	Plus élaborées
formule n° 1	=B8		=xo	
formule n° 2	=B8*B8	=B8^2	=xo*xo	
formule n° 3	=B9		=Ecart_initial	
formule n° 4	=D13/2			
formule n° 5	=B8+D13	=SI(ESTVIDE(D13);"";B8+D13)	=xo+h	=SI(ESTVIDE(D13);"";xo+h)
formule n° 6	=E13*E13	=E13^2	=x^2	=SI(ESTVIDE(D13);"";x^2)
formule n° 7	=F13-F7		=y-yo	=SI(ESTVIDE(D13);"";y-yo)
formule n° 8	=G13/D13	=SI(ESTVIDE(D13);"";G13/D13)		
formule n° 9	=SI(H13>H14;"f ' (xo) = "&ARRONDI(MIN(H13:H24);2);"f ' (xo) = "&ARRONDI(MAX(H13:H24);2))			

CELLULES NOMMEES

xo est le nom de la cellule B8
yo est le nom de la cellule F7
Ecart_initial est le nom de la cellule B9
h est le nom de la plage de cellules (D13:D24)
x est le nom de la plage de cellules (E13:E24)
y est le nom de la plage de cellules (F13:F24)

NB : Pour adapter l'application à d'autres fonctions[6], il suffit de modifier les formules numérotées 2 et 6. En outre, il convient de recopier vers le bas la formule n° 6. Par exemple, pour la fonction "inverse", ces formules sont :

	Sans nommer des cellules !		En nommant des cellules.	
	Elémentaires	Plus élaborées	Elémentaires	Plus élaborées
formule n° 2	=1/B8	=1/B8	=1/xo	
formule n° 6	=1/E13	=1/E13	=1/x	=SI(ESTVIDE(D13);"";1/x)

[6] Qui saurait réaliser une macro en VBA, permettant une saisie directe de la fonction ?

II. La fonction dérivée de la fonction *f*

21.Remarques préalables

Dans le paragraphe précédent, nous avons essayé de décrire une application informatique pouvant servir à introduire ou à illustrer un cours sur le nombre dérivé. L'article sur **"Comment utiliser au mieux cet outil avec des élèves ?"** reste à écrire… Que chacun d'entre nous s'approprie cet outil, le teste, l'expérimente avec des élèves et pourquoi pas, l'améliore et nous fasse part de son expérience, tel est notre espoir !

Le passage de la notion de nombre dérivé à celle de fonction dérivée, est l'objectif de l'activité-élève décrite ci-après.

Pour conjecturer l'expression de la fonction dérivée, on peut utiliser l'application informatique précédente.

Une application légèrement modifiée dans laquelle la saisie de l'écart initial génère le calcul automatique de 10 valeurs de *h* donc de *x*, en progression arithmétique (voir ci-contre), nous a semblé plus appropriée.

Fonction $f : x \mapsto x^2$

Valeurs à saisir.
Toutes les autres valeurs sont calculées.

Données initiales	
xo =	5
Ecart maximal	0,05
Pas =	0,01

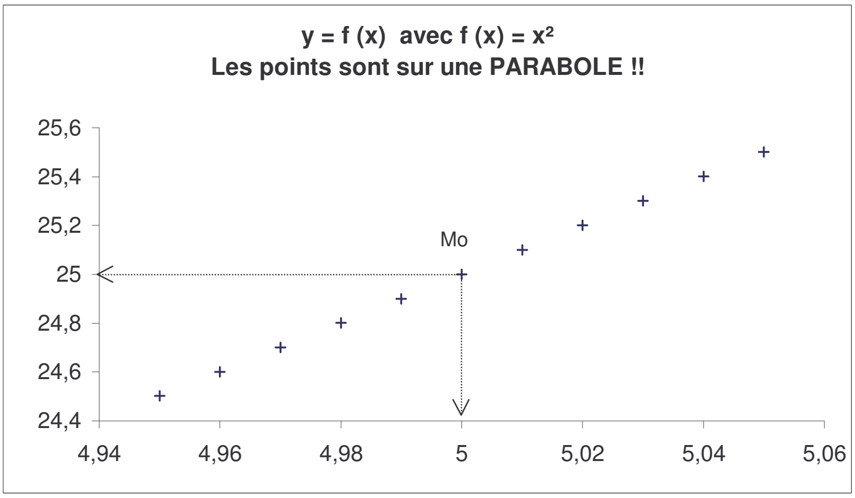
NB :
La distance entre 2 valeurs consécutives de x est appelée le Pas ; on a pris pour Pas le cinquième de l'Ecart initial.
On obtient ainsi une dizaine de valeurs pour x dont l'écart à xo vaut successivement :
h = - 5 . Pas
h = - 4 . Pas
.....
h = + 4 . Pas
h = + 5 . Pas

Point d'étude Mo	
xo	yo = f (xo)
5	25

$a = \frac{f(x)-f(xo)}{x-xo} = \frac{f(xo+h)-f(xo)}{h}$

h = x-xo écart entre x et xo	Point mobile M x =xo + h	y = f (x)	Coefficient directeur a de la droite sécante (MoM)
-0,05	4,95	24,5025	9,95
-0,04	4,96	24,6016	9,96
-0,03	4,97	24,7009	9,97
-0,02	4,98	24,8004	9,98
-0,01	4,99	24,9001	9,99
0,00	5	25	#DIV/0!
0,01	5,01	25,1001	10,01
0,02	5,02	25,2004	10,02
0,03	5,03	25,3009	10,03
0,04	5,04	25,4016	10,04
0,05	5,05	25,5025	10,05

Nombre dérivé en xo = 5 ?



22. Fonctions dérivées de la fonction " carré" et de quelques autres fonctions usuelles

- De $f(x) = x^2$ à $f'(x) = 2x$
  L'application informatique permet à chaque groupe d'élèves de trouver rapidement quelques nombres dérivés de la fonction. Conjecturer l'expression de la fonction dérivée est assez facile avec la fonction "carré". Bien que la fiche élève ne le préconise pas, une représentation graphique (points alignés appartenant à une droite passant par O) peut aider à découvrir le résultat attendu.
  Enfin, l'expression proposée par chaque groupe est testée en confrontant la valeur qu'elle induit pour x_0 à celle du nombre dérivé donné par l'application informatique.

- Dérivées de quelques fonctions usuelles.
  La conjecture qui est simple avec la fonction "carré", devient plus délicate avec les autres fonctions proposées. En cas de blocage, l'enseignant peut "donner" l'expression de la fonction dérivée ; le processus s'inverse alors : on confronte les valeurs données par l'application informatique à celles obtenues à partir de l'expression admise pour la dérivée.
  L'approche de la dérivée d'une somme peut sûrement être complétée par celle relative au produit, au quotient de 2 fonctions…

FICHE DE RECHERCHE ELEVE

Préambule

Lors d'une activité précédente, on a associé à une fonction numérique f donnée et à une valeur particulière x_o de la variable x[7], UN nombre appelé NOMBRE DERIVE de f en x_o. La valeur de ce nombre dérivé peut être "approchée" numériquement en observant la valeur vers laquelle tend le rapport $\dfrac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$ lorsque h prend des valeurs de plus en plus proches de zéro.

On a vu dans le cours que lorsque $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$ existe, cette limite est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse x_o donc au point M_o de coordonnées x_o et $y_o = f(x_o)$.

Travail à exécuter

Première partie : dérivée de $x \mapsto x^2$

1. Charger sous EXCEL le classeur FCTDERIV.XLS. Sélectionner la feuille FCTCARRE, consacrée à la fonction $f : x \mapsto x^2$.
   Saisir pour x_o, la valeur 3. Choisir pour écart initial h une valeur à votre convenance mais permettant de déterminer la valeur du nombre dérivé de f en $x_o = 3$.
   Compléter le tableau suivant :

$h =$	$x_o = 3$
	Nombre dérivé de f en $x_o =$

   Même question avec $x_o = -2$

h =	$x_o = -2$
	Nombre dérivé de f en $x_o =$

2. On peut associer à chaque valeur x_o appartenant à l'ensemble de définition de f, le nombre dérivé de f en x_o. On définit ainsi une fonction, la fonction dérivée de f. Elle est notée f'.
   La valeur en x_o de cette fonction dérivée f' qui se note $f'(x_o)$, n'est autre que le nombre dérivé de f en x_o.

   Compléter le tableau suivant :

Fonction $f : x \mapsto x^2$												
x_o	- 3	- 2,5	- 2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	2	2,5	3
$f'(xo)$ nbre dérivé de f en x_o												

3. En observant le tableau précédent, conjecturer l'expression de la fonction dérivée associée à la fonction "carré".
   $f : x \mapsto x^2$; $f' : x \mapsto$ soit $f'(x) =$
4.

$x_o =$	

   Choisir pour x_o une nouvelle valeur.

$f'(x_o) =$	

   En utilisant l'expression de la fonction dérivée proposée à la question 3, calculer $f'(x_o)$

   Vérifier en utilisant l'application informatique que le résultat obtenu est conforme.

[7] La valeur x_o choisie doit appartenir à l'ensemble de définition de la fonction f.

Deuxième partie : dérivées de quelques fonctions usuelles

Les autres feuilles de calcul du classeur permettent de réitérer cette étude avec d'autres fonctions.

A. Fonction "cube"

A1. Compléter le tableau suivant :

Fonction f : $x \mapsto x^3$												
x_o	- 5	- 4	- 3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3	5
$f'(x_o)$												

A2. En observant le tableau précédent, conjecturer l'expression de la fonction dérivée associée à la fonction "cube". $f(x) = x^3$; $f'(x) =$

A3.

$x_o =$
$f'(x_o) =$

Choisir pour x_o une nouvelle valeur puis en utilisant l'expression de la fonction dérivée proposée ci-dessus, calculer $f'(x_o)$.
Vérifier en utilisant l'application informatique que le résultat obtenu est conforme.

B. Fonction "inverse"

B1. Compléter le tableau suivant :

Fonction f : $x \mapsto \frac{1}{x}$												
x_o	- 5	- 4	- 2	-1	-1/2	-1/4	0	1/3	1	2	4	5
$f'(x_o)$												

B2. En observant le tableau précédent, conjecturer l'expression de la fonction dérivée associée à la fonction "inverse". $f(x) = \frac{1}{x}$; $f'(x) =$

B3.

$x_o =$
$f'(x_o) =$

Choisir pour x_o une nouvelle valeur puis en utilisant l'expression de la fonction dérivée proposée ci-dessus, calculer $f'(x_o)$.
Vérifier en utilisant l'application informatique que le résultat obtenu est conforme.

C. Fonctions "identité" et "racine carrée"

En procédant comme ci-dessus, compléter les égalités suivantes :

$f(x) = x$ $\quad f'(x) =$; $\quad f(x) = \sqrt{x}$ $\quad f'(x) =$

D. Une fonction "somme"

D1. Compléter le tableau suivant :

Fonction s : $x \mapsto x^3 + x^2$												
x_o	- 3	- 2	- 1	-0,5	0	-0,5	1	2	3	4	5	10
$s'(x_o)$												

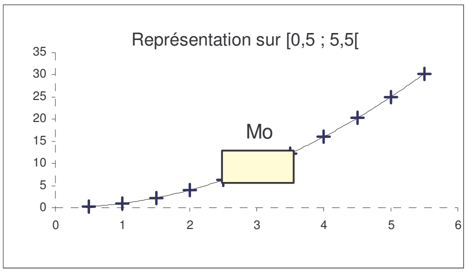
D2. Rappeler les résultats obtenus pour les fonctions "cube" et "carré" et remplir le tableau :

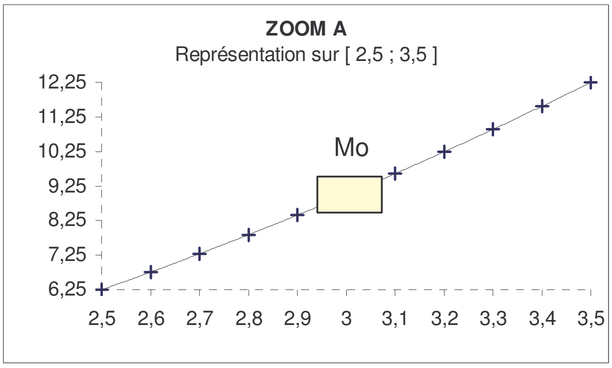
$u(x) = x^3$ donc $u'(x) =$; $v(x) = x^2$ donc $v'(x) =$

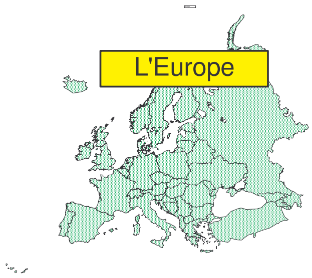
x_o	- 3	- 2	- 1	-0,5	0	-0,5	1	2	3	4	5	10
$u'(x_o)$												
$v'(x_o)$												

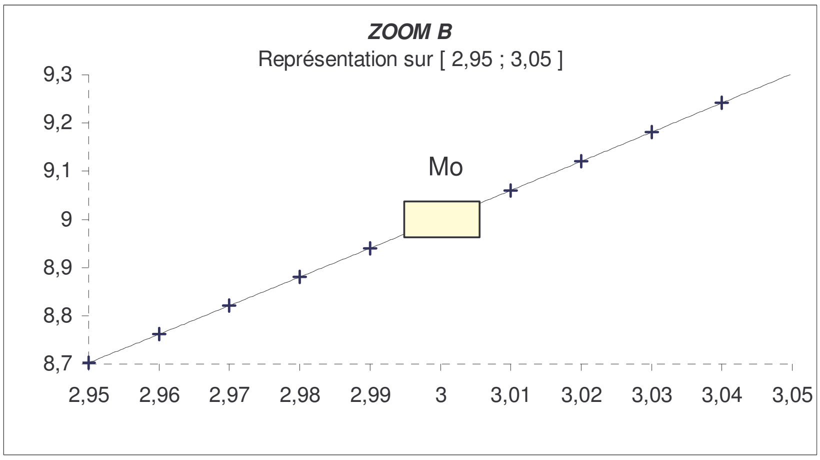
D3. Que peut-on conjecturer pour la fonction s ? $s(x) = x^3 + x^2$ donc $s'(x) =$

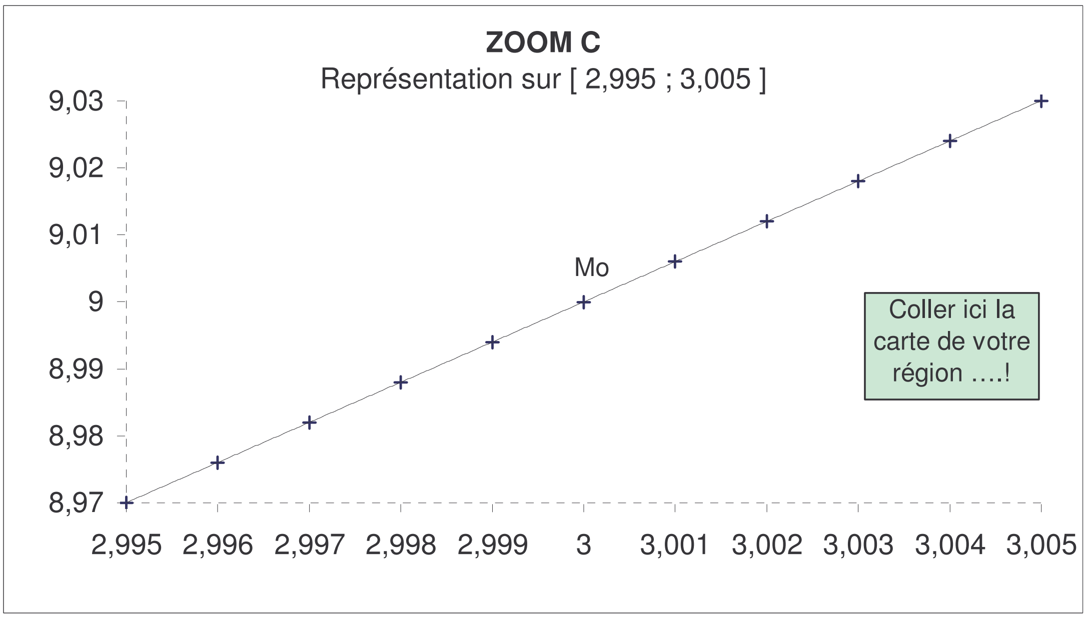
ANNEXE Dans l'infiniment petit de la fonction $x \mapsto x^2$ au voisinage de x = 3 !!











NB : En diminuant la valeur de l'écart initial, on obtient ces images rapprochées successives !