Utilisation des arbres en probabilités

L'utilisation des arbres en dénombrement et en probabilités est fort pratique pour modéliser certaines situations et aider à la compréhension de certains problèmes. Elle répond d'autre part à certaines exigences du programme de STAE :

« ... exemples d'emplois de partitions et de représentation (arbres , tableaux , ...) pour organiser et dénombrer des données relatives à la description d'une expérience aléatoire ... »

« Les représentation graphiques tiennent une place importante : en effet, outre leur intérêt propre, elles permettent de donner un contenu intuitif et concret aux objets mathématiques ... »

1 Etude d'un premier exemple

Dans le cadre d'activités « pleine nature », du VTT, du tir à l'arc et du kayak sont proposés à un groupe de 60 lycéens composés de 48 filles et 12 garçons.
34 filles et 6 garçons choisissent le VTT, 6 filles et 2 garçons préfèrent le tir à l'arc et les autres prennent le kayak.
Compléter le tableau suivant qui donne la répartition des élèves filles et garçons en fonction de leur choix :

	Nombre de filles	Nombre de garçons	Total
Effectifs en VTT			
Effectifs au tir à l'arc			
Effectifs au Kayak			
Total			

On désigne par Ω l'ensemble des 60 lycéens. Un élève du groupe est pris au hasard. On s'intéresse au sport qu'il pratique et au fait que se soit une fille ou un garçon.
On considère les événements suivants :

V: l'élève opte pour le VTT .
T : l'élève opte pour le tir à l'arc.
K: l'élève opte pour le kayak.
G : l'élève est un garçon.
F : l'élève est une fille.

1) Dans un premier temps, exprimer en fonction de card (Ω), card (K), card(F), card(G), card(T) et card(V) la probabilité des événements suivants :
l'élève choisi : pratique du kayak,
est un garçon,
est une fille,
est une fille pratiquant du kayak.

2) Dans cette question, on sait que l'élève choisi est une fille.
a) Déterminer la probabilité pour qu'elle pratique du kayak.

Remarque 1 : avec cette information, (on sait que l'élève est une fille) on définit sur Ω une nouvelle probabilité. Notons p_F cette probabilité. Le résultat obtenu à la question précédente est alors noté $p_F(K)$. Cette probabilité est appelée probabilité de K sachant que F est réalisé ou encore probabilité de K sachant F.

Remarque 2 : cette probabilité $p_F(K)$ est aussi notée $p(K/F)$

b) Justifier que, dans notre exemple, $p_F(K)=\dfrac{p(F\cap K)}{p(F)}$. Cette écriture est-elle toujours définie ?

3) De même, déterminer la probabilité que l'élève choisi pratique du kayak, sachant que c'est un garçon (cette probabilité est notée $p_G(K)$). Comparer ce résultat avec $\dfrac{p(G\cap K)}{p(G)}$.

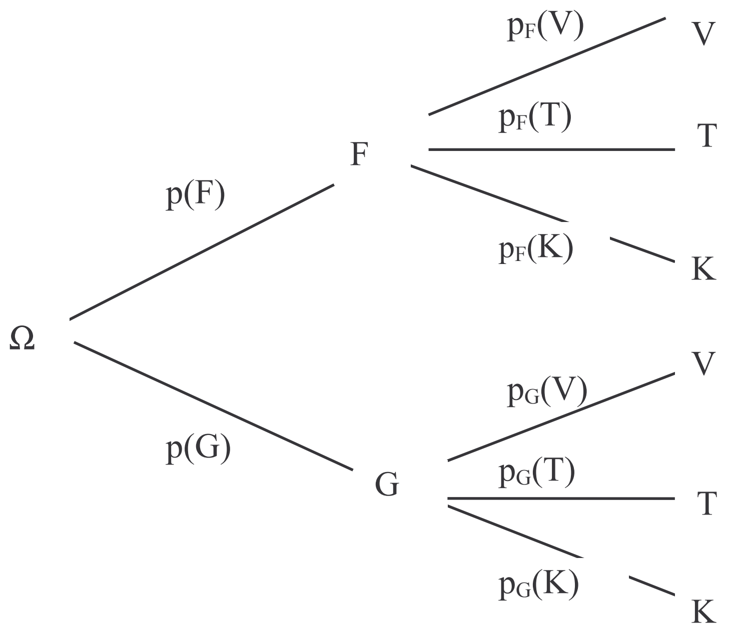
2 Définition

Soit B un événement de probabilité non nulle. On appelle probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé ou plus simplement probabilité de A sachant B, le nombre noté $p_B(A)$ ou p(A/B) défini par $p_B(A)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$.

Remarque 3 : p_B est une nouvelle probabilité définie sur Ω. On pourrait aussi dire que cela équivaut à travailler sur un univers réduit, cet univers étant l'événement B.

Remarque 4 : si A est un événement de probabilité non nulle, le nombre $p_A(B)$ ou p(B/A) est défini par $p_A(B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$.

On peut résumer la situation de ce premier exemple à l'aide de l'arbre suivant :



Exercice 1:

1) Dans l'exemple précédent, exprimer par une phrase les deux probabilités suivantes : $p_G(T)$ et $p_F(T)$. Calculer ces deux probabilités.

2 a) Exprimer par une phrase l'événement (F∩T) .

b) Faire apparaître sur l'arbre précédent le chemin correspondant à cet événement (F∩T).

c) Calculer la probabilité de cet événement (F∩T) en utilisant la définition de $p_F(T)$ et les résultats précédents.

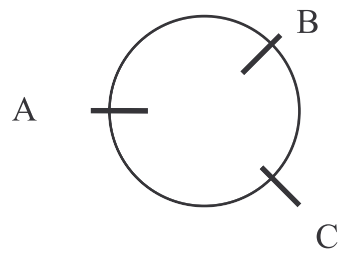
d) En utilisant l'arbre précédent, comment obtenez-vous ce résultat?

3 Etude d'un deuxième exemple

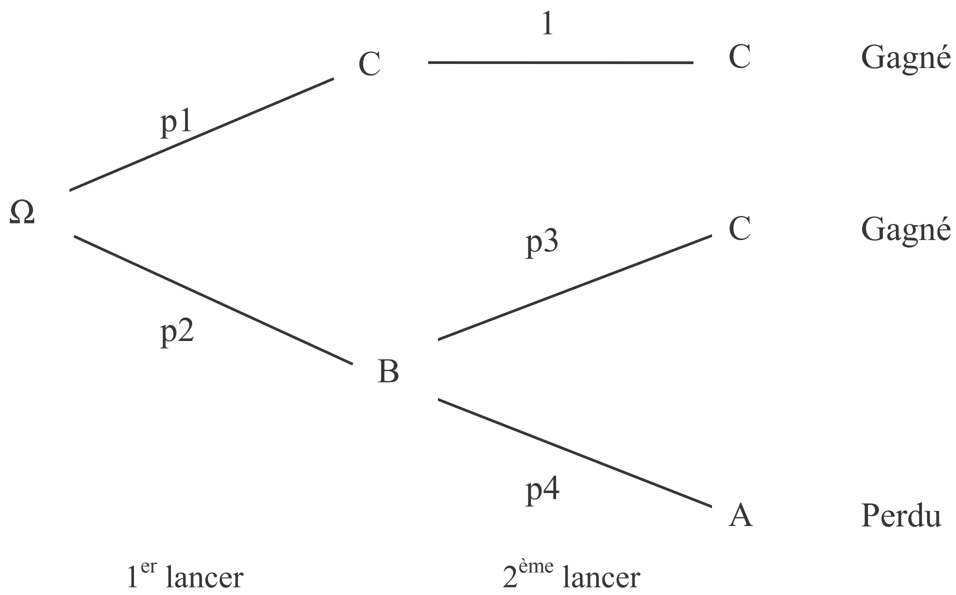
Exemple 2 « le jeu **tourne en rond** »

Au départ un jeton est placé en A.
On lance un dé supposé parfait :

- si le résultat du lancer est 1 , 2 , 3 ou 4 déplacer le jeton en C. Vous avez gagné.
- si le résultat est 5 ou 6 déplacer le jeton en B et relancer le dé.
- si le nouveau résultat est un 5 ou un 6 déplacer le jeton en C. Vous avez gagné. Sinon déplacer le jeton en A, vous avez perdu.



On peut schématiser cette situation à l'aide de l'arbre suivant :



1) Déterminer la probabilité p2 d'obtenir la case B au premier lancer.

2) Que représente p3 ?
Calculer cette probabilité p3.

3) Déterminer la probabilité d'aller à la case B au premier lancer et de perdre au second lancer.
On utilisera le résultat obtenu à la question 2) de l'exercice 1.

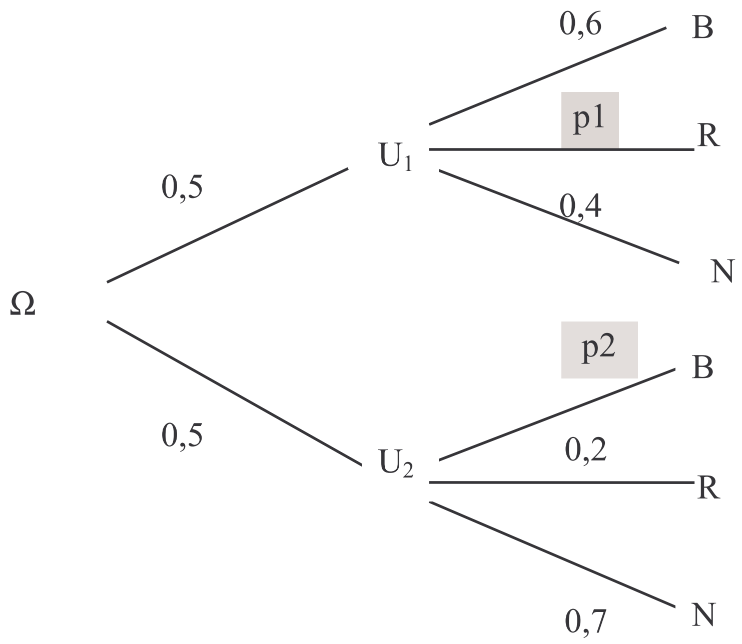
4) Calculer la probabilité de gagner à ce jeu.

Remarque 5 : Dans cet exercice, on peut vouloir écrire les probabilités à partir d'événements. Il faudra pour cela décrire Ω.
On peut prendre Ω ={ perdu ; gagné} ou encore si on s'intéresse aux différents couples de résultats Ω ={ CC ; BC ; BA }.
La rédaction devient alors plus difficile pour les élèves. On peut très bien obtenir une rédaction rigoureuse en utilisant les notations p1, p2 et p3 données dans le texte de l'énoncé.

4 Etude d’un troisième exemple

On considère deux urnes U_1 et U_2.
L’urne U_1 contient des boules indiscernables au toucher, 6 de couleur blanche et 4 de couleur noire.
L’urne U_2 contient une boule blanche, 7 boules noires et 2 boules rouges.
On choisit une urne au hasard, et on en tire une boule. On s'intéresse à l'urne choisie et à la couleur de la boule.

On peut schématiser cette situation à l'aide de l'arbre suivant :



1) Dire par une phrase ce que représente les nombres p1 et p2 indiqués dans cet arbre.
Donner ces deux probabilités.

2 a) Lire sur cet arbre la probabilité d’obtenir une boule blanche sachant que l’urne U_1 est choisie.
b) Lire sur cet arbre les probabilités : $p_{U_1}(N)$ et $p_{U_2}(R)$.

3) Traduire par une phrase les événements $(U_1 \cap N)$ puis $(U_2 \cap N)$ et déterminer les probabilités de ces événements.

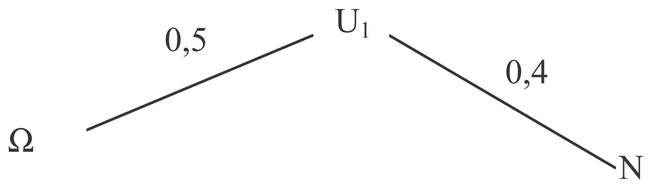
4) Dans cette expérience (choix d’une urne puis choix d’une boule) quelle est la probabilité :
- de tirer une boule noire ?
- de tirer une boule rouge ?
- de tirer une boule blanche ?

Vérifier la cohérence de ces trois résultats.

5) Traduire par une phrase la probabilité $p_B(U_1)$. En utilisant la définition, calculer cette probabilité. Que peut-on dire de $p_R(U_2)$?

Remarque 6:

L'événement « l'urne U_1 a été choisie et une boule noire a été tirée » est noté $U_1 \cap N$ ou « U_1 et N » ; il est représenté sur l'arbre par le chemin suivant :



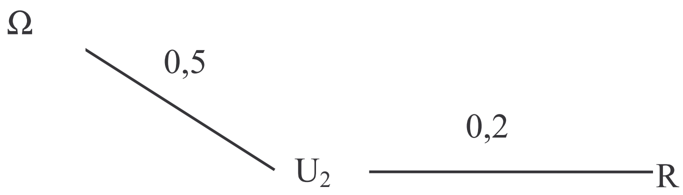
On a :

$p(U_1 \cap N)$ est égal au produit des probabilités inscrites sur le chemin passant par U_1 et N

$p(U_1 \cap N) = p(U_1) \times p_{U_1}(N)$

$p(U_1 \cap N) = 0,5 \times 0,4$ soit 0,2

De même l'événement « U_2 et R » est représenté par le chemin suivant :



$p(U_2 \cap R) = p(U_2) \times p_{U_2}(R)$

$p(U_2 \cap R) = 0,5 \times 0,2$ soit 0,1

Remarque 7

Puisque dans cette expérience, on s'intéresse à l'urne et à la couleur de la boule, on peut écrire l'univers Ω de la façon suivante : $\Omega = \{ U_1B ; U_1N ; U_2B ; U_2R ; U_2N)$.

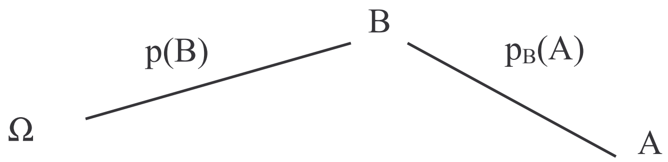
L'événement N :"la boule est noire" sera alors défini par $N = \{ U_1N ; U_2N \}$

5 Quelques règles d'utilisation d'un arbre pondéré

1)

Dans un arbre pondéré, la probabilité d'un événement représenté par un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur chaque branche de ce chemin.

Ainsi l'événement « A et B » noté aussi $A \cap B$ est représenté par le chemin suivant :

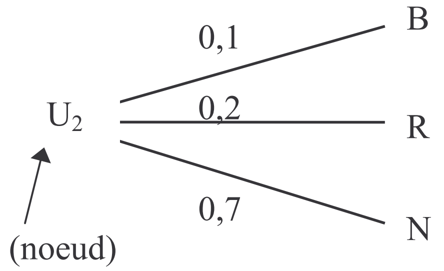


la probabilité de cet événement $(A \cap B)$ est :

$p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A)$

2)

La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même noeud est égale à 1

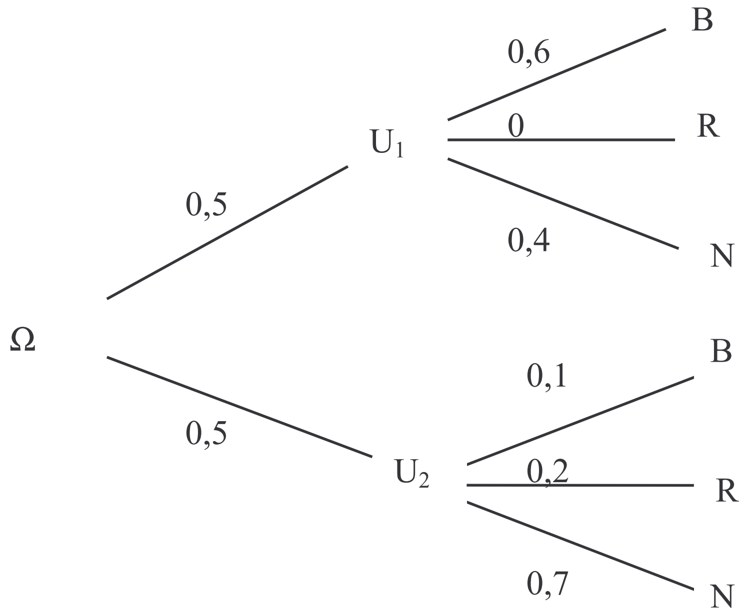


$0,1 + 0,2 + 0,7 = 1$

3)

Pour obtenir la probabilité de l'événement B, on additionne les probabilités des événements représentés par tous les chemins menant à B.

Si l'on revient à l'exemple précédent :



$p(B) = p(U_1) \times p_{U1}(B) + p(U_2) \times p_{U2}(B)$
$p(B) = 0,5 \times 0,6 + 0,5 \times 0,1$
soit $p(B)=0,35$

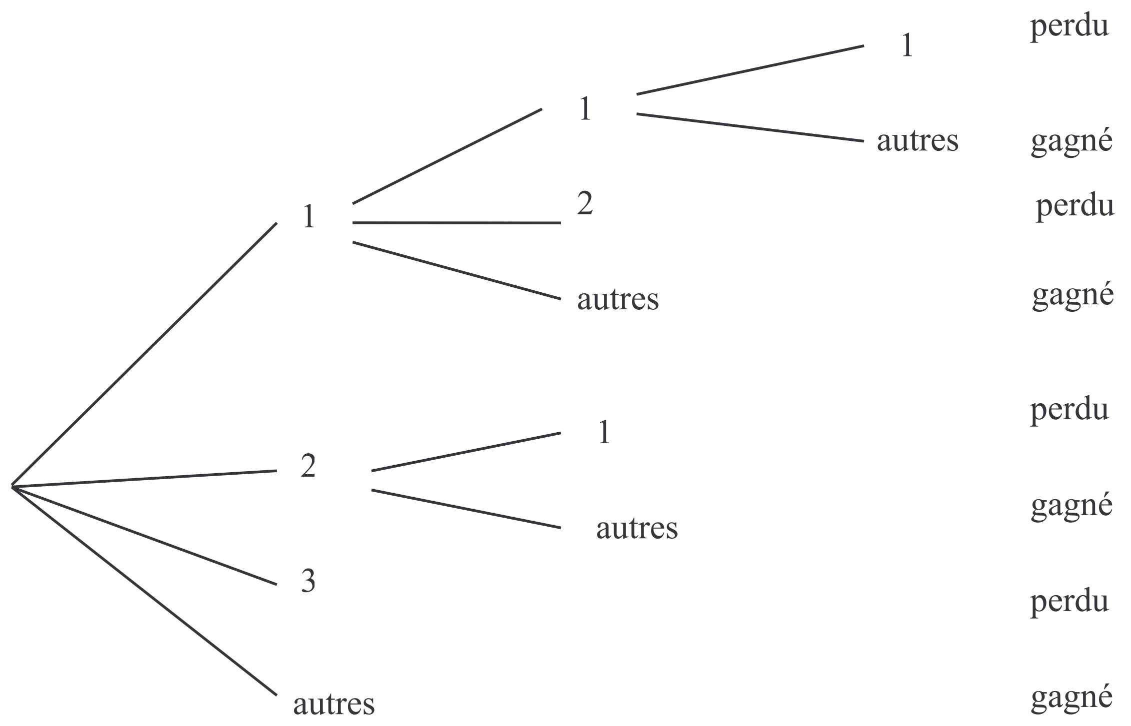
5 Un dernier exemple.

Le jeu de la case fatale:

Départ	1	2	3 fatale	4	5	6

Le joueur part de la case départ. Il lance un dé cubique non truqué et avance du nombre de cases indiqué sur la face supérieure du dé. Le joueur gagne dès qu'il a dépassé la case 3 fatale, il perd s'il tombe sur cette case ; il s'arrête alors de jouer. Il relance le dé dans les autres cas. Après trois jets au maximum, le joueur est fixé sur son sort.

1) Compléter l'arbre ci-dessous, en indiquant les probabilités correspondantes à chacune des branches.



2) Calculer les probabilités suivantes :

"Le joueur gagne à l'issue du premier jet"
"Le joueur perd à l'issue du premier jet".
"Le joueur gagne à l'issue du second jet"
"Le joueur gagne la partie"
"Le joueur perd la partie"

Quelques références bibliographiques :

L'introduction du concept de probabilité conditionnelle : avantage et inconvénients de l'arborescence.
André TOTOHASINA
REPERES-IREM N° 15, avril 1994

Un outil sous-estimé : l'arbre probabiliste.
Bernard PARZYSZ
IREM Paris-Sud (bulletin APMEP N° 372)