

Correction du sujet de baccalauréat technologique session 1999

Exercice N°1

- 1) Notons Ω l'ensemble des issues possibles de l'expérience considérée. Chacune de ces issues possibles est une combinaison de deux éléments pris dans un ensemble à 15 éléments.

$$\text{On a } \text{Card}(\Omega) = C_{15}^2 \text{ soit } \text{Card}(\Omega) = 105$$

L'événement A est réalisé si les deux jetons sont tirés parmi les trois jetons rouges, d'où $\text{Card}(A) = C_3^2$ soit $\text{Card}(A) = 3$

Puisque les jetons sont indiscernable au toucher, les événements élémentaires sont considérés comme équiprobables. Dans ces conditions la probabilité $p(A)$ de l'événement

$$A \text{ est donnée par } p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} \text{ soit } p(A) = \frac{1}{35}$$

Conclusion : la probabilité de l'événement A est $1/35$

- 2) L'événement B est réalisé si les deux jetons tirés sont pris parmi les trois rouges ou parmi les quatre noirs ou parmi les huit jetons blancs d'où :

$$\text{Card}(B) = C_3^2 + C_4^2 + C_8^2 \text{ soit } \text{Card}(B) = 37$$

Les événements élémentaires étant équiprobables, on a $p(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)}$

$$\text{Conclusion} : \text{ la probabilité de l'événement B est } p(B) = \frac{37}{105}$$

- 3) Notons \bar{C} l'événement contraire de l'événement C. \bar{C} est donc l'événement : "aucun des deux jetons n'est blanc". On a $\text{Card}(\bar{C}) = C_7^2$ soit $\text{Card}(\bar{C}) = 21$ car \bar{C} est réalisé si les deux jetons sont tirés parmi les 7 jetons rouges ou noirs.

$$\text{La probabilité l'événement } \bar{C} \text{ est } p(\bar{C}) = \frac{21}{105} \text{ soit } p(\bar{C}) = 0,2$$

Puisque $p(\bar{C}) + p(C) = 1$, on en déduit que la probabilité de l'événement C est $p(C) = 0,8$.

- 4) Notons D l'événement « les deux jetons sont blancs »; dans cette question, on cherche la probabilité de l'événement D sachant que l'événement B est réalisé. La probabilité que les deux jetons soient blancs sachant que les deux jetons sont de la même couleur est notée

$$p(D/B) \text{ ou encore } p_B(D) \text{ et ce nombre est défini par } p(D/B) = \frac{p(D \cap B)}{p(B)}.$$

Or l'événement $D \cap B$ n'est autre que l'événement D.

$$p(D) = \frac{C_8^2}{105} \text{ soit } p(D) = \frac{28}{105} \text{ et donc } p(D \cap B) = \frac{28}{105}.$$

$$\text{D'après la question 2, } p(B) = \frac{37}{105}, \text{ d'où } p(D/B) = \frac{28}{105} \times \frac{105}{37} \text{ soit } p(D/B) = \frac{28}{37}$$

Conclusion : la probabilité que les deux jetons soient blancs sachant qu'ils sont de la même couleur est $28/37$.

Exercice N°2

Notons X la variable aléatoire prenant pour valeur la masse d'un paquet pris au hasard.

D'après l'énoncé, la loi de probabilité de cette variable aléatoire X est la loi normale de moyenne 1,01 et d'écart-type 0,01.

Pour calculer les probabilités demandées on utilise le théorème suivant :

Dire que la loi de probabilité de la variable aléatoire X est la loi normale $N(1,01 ; 0,01)$, est équivalent à dire que la loi de probabilité de la variable aléatoire U définie par

$$U = \frac{X - 1,01}{0,01} \text{ est la loi normale centrée et réduite.}$$

1) La probabilité qu'un sachet pris au hasard ait une masse inférieure à 1 kg est notée $p(X < 1)$.

Les deux inégalités $X < 1$ et $U < -1$ sont équivalentes, d'où :

$$p(X < 1) = p(U < -1)$$

$$\text{or } p(U < -1) = 1 - p(U < 1).$$

Dans la table de la loi normale centrée réduite, on peut lire que $p(U < 1) = 0,841$

$$\text{soit } p(X < 1) = 0,159.$$

Conclusion : La probabilité que la masse d'un sachet pris au hasard soit inférieure à 1 kg est 0,159 à 0,001 près. On en déduit que pour un lot de 1 000 sachets, 159 est un nombre approximatif de sachets ayant une masse inférieure à 1 kg.

2 a) La probabilité qu'un sachet pris au hasard ait une masse supérieure à 1,025 kg est notée

$$p(X > 1,025) ; \text{ or } p(X > 1,025) = 1 - p(X \leq 1,025)$$

$$\text{et } p(X \leq 1,025) = p(U \leq 1,5)$$

Dans la table de la loi normale centrée réduite, on peut lire que $p(U \leq 1,5) = 0,933$

$$\text{d'où } p(X > 1,025) = 0,067$$

Conclusion : Pour un lot de 1 000 sachets, 67 est un nombre approximatif de sachets ayant une masse supérieure à 1,025 kg .

2 b) La probabilité qu'un sachet pris au hasard ait une masse comprise entre 1 kg et 1,015 kg est $p(X < 1,015) - p(X \leq 1)$ ou $p(1 < X \leq 1,015)$.

$$\text{Or } p(X < 1,015) = p(U < 0,5)$$

On obtient finalement $p(X < 1,015) - p(X < 1) = 0,532$ à 0,001 près.

Conclusion : Pour un lot de 1 000 sachets, 532 est un nombre approximatif de sachets ayant une masse comprise entre 1 kg et 1,015 kg.

Exercice N°3

Partie A

1)

- La droite (T) passe par les points de coordonnées (0; 1) et (1; 0). Son ordonnée à l'origine est $b = 1$ et son coefficient directeur est $\frac{0-1}{1-0}$ soit -1

On en déduit que $y = -x + 1$ est l'équation réduite de cette droite (T).

- $f(0)$ est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 0. On peut lire que $f(0) = 1$.
- $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0. Cette tangente est la droite (T), d'où $f'(0) = -1$.

2) On admet que la fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + a + be^{-x}$.

On sait d'après la lecture graphique que $f(0) = 1$ et que $f'(0) = -1$.

Or la dérivée de f est définie sur \mathbb{R} par $f'(x) = 1 - be^{-x}$.

On en déduit donc que les réels a et b sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 1 - b = -1 \end{cases} \text{ système équivalent à } \begin{cases} a = 1 - b \\ b = -2 \end{cases}$$

Ce système admet un seul couple solution. On obtient $a = -1$ et $b = 2$.

Partie B

1) La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} . Sa dérivée est la fonction f' définie sur \mathbb{R} par $f'(x) = 1 - 2e^{-x}$. Etude du signe de $f'(x)$.

Les inéquations suivantes sont équivalentes :

$$f'(x) > 0$$

$$2e^{-x} < 1$$

$$e^{-x} < 0,5$$

$$\ln(e^{-x}) < \ln(0,5) \text{ car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[$$

$$-x < \ln(0,5)$$

$$x > \ln(2) \quad \text{car } \ln(0,5) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \text{ soit } \ln(0,5) = -\ln(2)$$

Par un raisonnement identique, on obtient que $f'(x) < 0$ si et seulement si $x < \ln(2)$ et que $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = \ln(2)$.

De ces résultats, on déduit que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $] -\infty; \ln(2)]$ et que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[\ln(2); +\infty [$.

La fonction f admet donc un minimum en $x = \ln(2)$ et la valeur exacte de ce minimum est $f(\ln(2))$.

Calcul de $f(\ln(2))$

$$f(\ln(2)) = \ln(2) - 1 + 2e^{-\ln(2)} \quad e^{-\ln(2)} = 0,5$$

$$\text{soit } f(\ln(2)) = \ln(2)$$

On peut résumer ces résultats sur les variations de la fonction f dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	$\ln(2)$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$			

3 b) La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} . Elle admet donc des primitives sur cet intervalle :
 la fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = 0,5x^2 - x - 2e^{-x}$ est une des primitives de f sur \mathbb{R} .

c) f est positive sur l'intervalle $[1 ; 3]$ et l'unité d'aire est égale à 1 cm^2 .
 L'aire A_1 , exprimée en cm^2 , du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$ est donc égale à :

$$A_1 = \int_1^3 f(t) dt$$

$$A_1 = F(3) - F(1) \quad \text{soit } A_1 = 2 - 2e^{-3} + 2e^{-1}$$

2,636 est une valeur approchée de A_1 à 0,001 près.

de même , on obtient

$$A_2 = \int_1^3 (t-1) dt \quad (\text{aire d'un triangle rectangle isocèle})$$

$$A_2 = 2$$

On en déduit la valeur exacte de A .

$$A = A_1 - A_2 \text{ soit } A = 2e^{-1} - 2e^{-3}$$

0,64 est une valeur approchée de A à 0,01 près.