Introduction du nombre dérivé : un exemple de progression en classe de première du Baccalauréat Technologique

<u>Pré - requis :</u>

1°) Savoir déterminer le coefficient directeur d'une droite (par lecture graphique et par calcul).
2°) Savoir déterminer la limite d'une fonction en 0.

<u>Déroulement :</u>

1°) Activité d'approche : sur un exemple, visualisation du nombre dérivé en tant que coefficient directeur de la tangente.
2°) La tangente en tant que "position particulière" d'une sécante à une courbe.
3°) Définition du nombre dérivé.
4°) Equations de tangentes.
5°) Lecture graphique de nombres dérivés.
6°) La tangente en tant qu'approximation de la courbe.

<u>1°) Activité d'approche</u>

Etude de la fonction $f : x \mapsto f(x) = (1 + x)^2$ au voisinage de 0.
On désigne par A le point de la courbe représentative de f d'abscisse 0,

a) <u>Travail avec calculatrice graphique:</u>

<u>Etape 1</u> : Tracer la courbe représentative de f sur l'écran de la calculatrice en prenant pour fenêtre : $\begin{cases} -2 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 5 \end{cases}$ Observer la courbe au voisinage de A.

<u>Etape 2</u> : Modifier la fenêtre en prenant : $\begin{cases} -0{,}5 \leq x \leq 0{,}5 \\ -1 \leq y \leq 3 \end{cases}$
Observer la courbe au voisinage de A.

<u>Etape 3</u> : Modifier la fenêtre en prenant : $\begin{cases} -0{,}25 \leq x \leq 0{,}25 \\ -1 \leq y \leq 3 \end{cases}$
Observer la courbe au voisinage de A.

b) <u>Représentation graphique sur papier :</u>

Représenter la fonction f dans un repère orthonormal (unité : 2cm sur chaque axe) sur l'intervalle [-2 ; 1].
Noter sur la courbe le point A d'abscisse 0 et construire au voisinage de A la droite qui se rapproche le plus de la courbe.
Quel nom pourrait-on lui donner ?
Déterminer une équation de cette droite.

2°) Tangente et nombre dérivé

Objectif : étant donné une fonction f, (C_f) sa représentation graphique dans un repère et A un point de (C_f) d'abscisse x_0 , comment "approcher" au voisinage de A, la courbe (C_f) par une droite ?

Commentons les figures suivantes :

figure 1

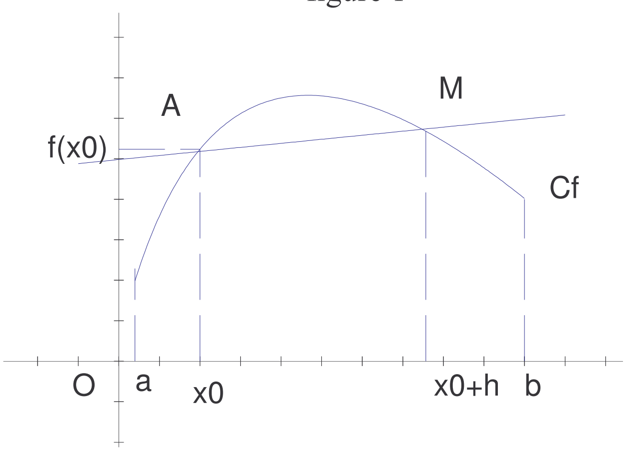


figure 2

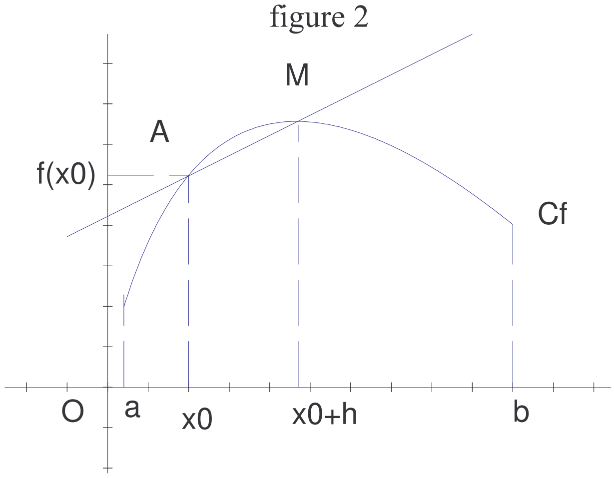


figure 3

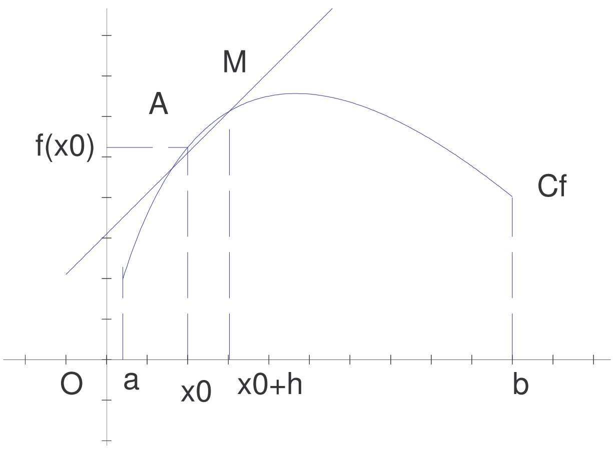
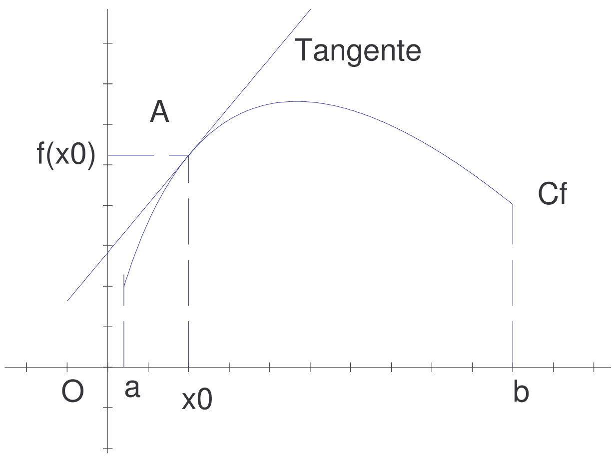


figure 4



Sur ces figures, (C_f) est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle [a;b].
Le point A (x_0 ; $f(x_0)$) a été fixé et le point M, mobile, a pour coordonnées ($x_0 + h$; $f(x_0 + h)$).

La droite (AM) a pour coefficient directeur a(h) avec : $a(h) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Lorsque h se rapproche de 0, le point M se déplace sur la courbe (C_f) et se rapproche de A.

La position limite (lorsqu'elle existe) de la droite (AM) quand M tend vers A est appelée : **tangente en A à la courbe (C_f) représentative de f.**

Le coefficient directeur (lorsqu'il existe) de la tangente est donné par :

$$a = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

3°) Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert, et soit (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. Soit A le point de la courbe (C_f) d'abscisse x_0.

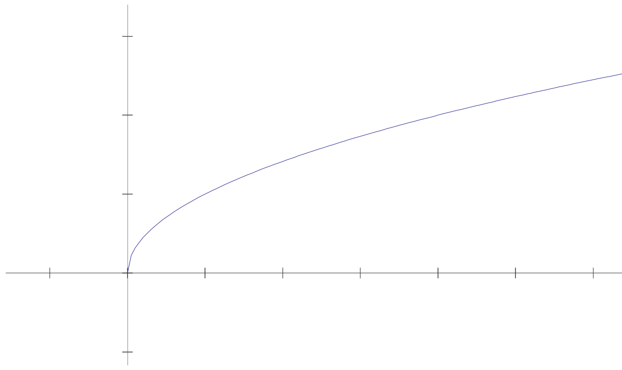
> Si la courbe (C_f) admet en A une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées, on dit que la fonction f est **dérivable en x_0**.
> On appelle alors **nombre dérivé de f en x_0** le coefficient directeur de la tangente en A (x_0 ; $f(x_0)$) à la courbe (C_f) et on le note : **$f'(x_0)$.**

Le nombre dérivé, s'il existe, est donc défini par :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

Remarques :

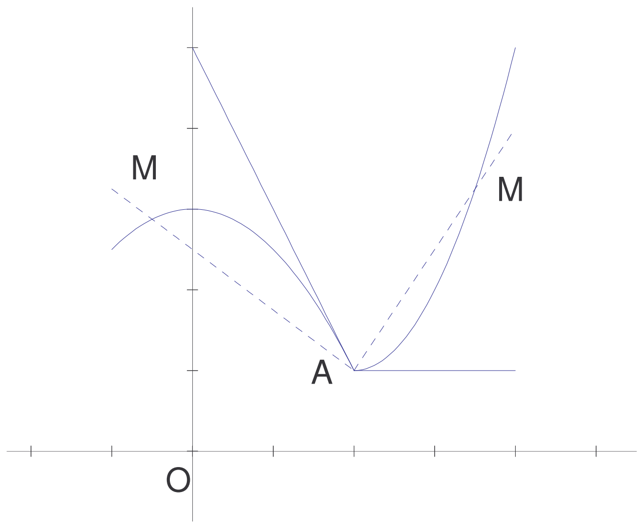
1°) Si la tangente en A à la courbe (C_f) est parallèle à l'axe des ordonnées, alors elle n'a pas de coefficient directeur. On dit alors que f n'est pas dérivable en x_0.



Exemple : $f : x \to \sqrt{x}$

En O (0 ; 0), la tangente est l'axe des ordonnées, f n'est donc pas dérivable en 0.

2°) Dans l'exemple ci-contre, f n'est pas dérivable en x_0, car la sécante (AM) n'admet pas de position limite unique quand M tend vers A. On admettra, dans ce cas, que f est dérivable à droite en x_0 et dérivable à gauche en x_0



3°) Equations de tangentes

a) Exercice :
On donne la fonction f définie sur R par : $f(x) = x^2$.
Déterminer le nombre dérivé de f en 2, puis en x_0 où x_0 désigne un réel quelconque.
En déduire une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point A d'abscisse 2 puis en M_0 d'abscisse x_0.

b) Méthode :
Pour déterminer l'équation réduite d'une tangente (non parallèle à l'axe des ordonnées), à une courbe (C_f) représentative d'une fonction f , en un point d'abscisse x_0 :

1) On détermine le nombre dérivé $f'(x_0)$ qui est le coefficient directeur de la tangente.
L'équation réduite de la tangente peut donc s'écrire :

$$y = f'(x_0)\, x + b$$

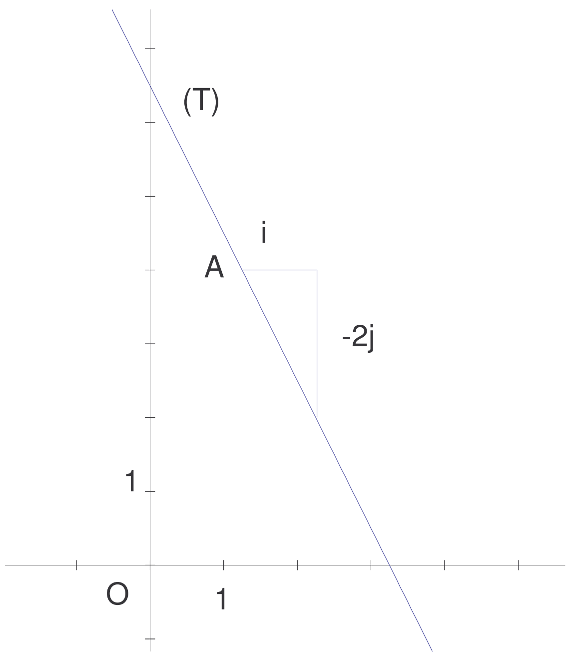
2) La tangente passe par le point A (x_0 ; $f(x_0)$).

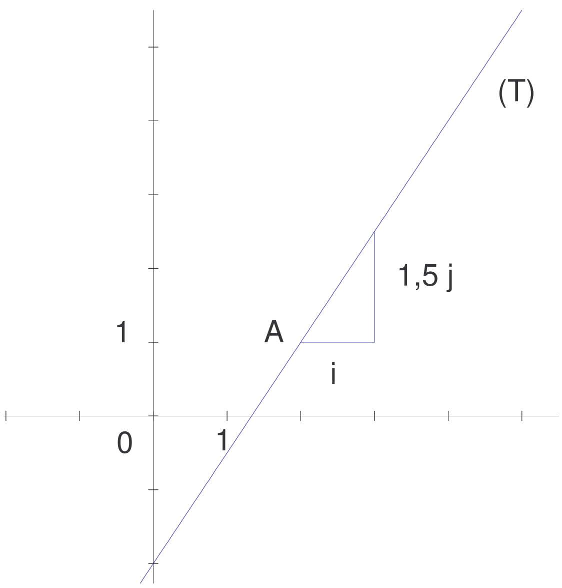
3) Pour déterminer la valeur de b, il suffit de remarquer que les coordonnées de ce point vérifient l'équation de la tangente, c'est à dire : $f(x_0) = f'(x_0)\ x_0 + b$. On conclut en donnant l'équation réduite de la tangente .

Remarque : Pour construire la tangente (T) à la courbe (C_f) représentative de la fonction f en un point A (x_0 ; $f(x_0)$), il suffit de connaître : $f'(x_0)$.

$f'(x_0) = -2$

$f'(x_0) = \dfrac{3}{2}$

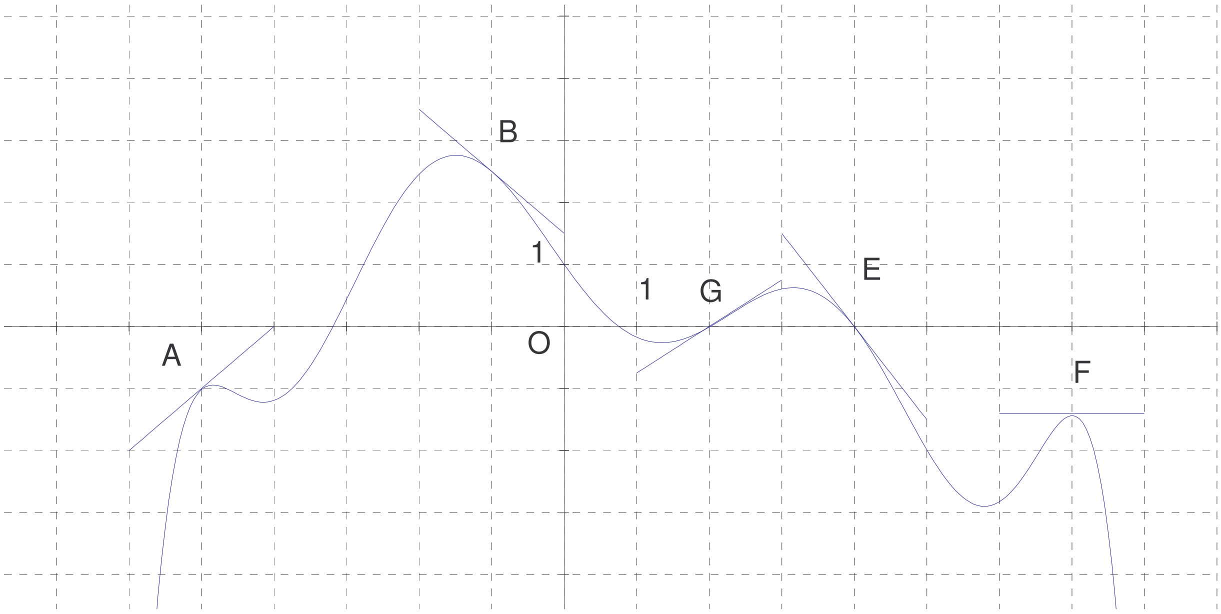




4°) Lecture graphique de nombres dérivés

La courbe (C) située ci-dessous est celle d'une fonction f dérivable pour tout réel x de R.
Lire : f '(-5) ; f '(-1) ; f '(2) ; f '(4) ; f '(7) ;.
Graphiquement, quelle différence faites-vous entre f '(-1) et f(-1) ?

.



5°) La tangente comme approximation de la courbe

Exemple :

Reprenons la fonction f : $x \mapsto f(x) = (1 + x)^2$

a) Déterminer le nombre dérivé de f en 0.
En déduire l'équation réduite de la tangente à C_f au point A (0 ; f(0)).

b) Recopier et compléter le tableau suivant :

x	-1	-0,5	-0,1	-0,01	0	0,01	0,1	0,5
f(x)								
2x + 1								
f(x) - (2x + 1)								

c) Que peut-on dire de l'erreur commise quand on remplace f(x) par 2x + 1 pour des valeurs de x "voisines" de 0 ?

On admettra :

> La tangente en A à la courbe (C) est la droite qui réalise la meilleure approximation affine de la courbe au voisinage de A.