LA FORMULE DE HÉRON

HÉRON d'Alexandrie vécut et travailla à Alexandrie. Il est difficile de donner ses dates exactes, on le situe au 1er siècle après J.C. en raison d'une allusion à l'éclipse de 61.[1 et 2]
On ne connaît pas grand chose sur la vie d' HÉRON. Il a écrit de nombreux traités dont quatorze nous sont parvenus. HÉRON est un important géomètre et un inventeur de talent et qui a conçu d'innombrables machines mues par des mouvements de fluides. Contrairement à de nombreux mathématiciens grecs, HÉRON favorise les méthodes pratiques de calcul, avec peu de démonstration et beaucoup d'exemples. Il ne fait pas de distinction entre valeur approchée et valeur exacte.
Il donne par exemple $\frac{13}{30}a^2$ comme aire d'un triangle équilatéral dont la mesure du côté est a.
HÉRON est connu par la formule donnant l'aire d'un triangle connaissant la mesure des trois côtés. Cette formule était déjà connue d'Archimède, HÉRON en donne une démonstration et son nom lui est donné par les mathématiciens arabes.
(Une traduction du texte de HÉRON a été faite par Jacqueline GUICHARD de l'IREM de Poitiers. Nous pouvons vous la faire parvenir ou contacter l'IREM de Poitiers).[3]
La formule de HÉRON figure dans les programmes des classes de BEPA et du baccalauréat professionnel. On peut en faire une démonstration en classe de baccalauréat technologique dans le cadre de travaux dirigés en géométrie plane, mais la formule de Héron n'est pas au programme de cette classe.

Cette formule, contrairement à la formule classique (base fois hauteur divisé par 2) présente un intérêt opératoire pratique. Pour calculer, par exemple, l'aire d'une parcelle, un agriculteur (ou un particulier) dispose soit des mesures effectuées sur le terrain, soit des mesures effectuées sur le plan cadastral. Il est rare que les hauteurs soient tracées, et il ne dispose donc que de la longueur des côtés et des diagonales de la parcelle. D'où l'intérêt de cette formule.

Remarque

Il existe une formule de HÉRON pour le quadrilatère convexe.
Soit ABCD un quadrilatère convexe, notons a, b, c et d la mesure de ses côtés et p son demi-périmètre.
Dans le cas où le quadrilatère est inscriptible dans un cercle, l'aire S est donnée par la formule:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Dans le cas où le quadrilatère convexe n'est pas inscriptible dans un cercle, l'aire est donnée par la formule :

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \times \cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

où α et β désignent les mesures de deux angles opposés.

Les fiches qui suivent (pages 6 à 9) peuvent être proposées en classe de BEPA ou en classe de BAC-PRO.

[1] Des mathématiciens de A à Z de B. HAUCHECORNE et D. SURATTEAU éditions ELLIPSES 1996.
[2] Textes et documents mathématiques terminales A2-A3 option CRDP 86000 Poitiers.
[3] Traduction du texte de HÉRON de Jacqueline GUICHARD IREM de Poitiers

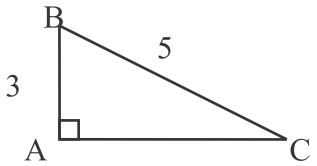
CLASSE : BEPA MODULE : G6 CHAPITRE : Relations métriques dans un triangle. DURÉE : 2 fois une heure	**OBJECTIF GÉNÉRAL** *Calcul d'aires dans un triangle quelconque (introduction de la formule de HÉRON)* **PRÉ-REQUIS** *Relations métriques et calculs trigonométriques dans un triangle rectangle*

I Activité

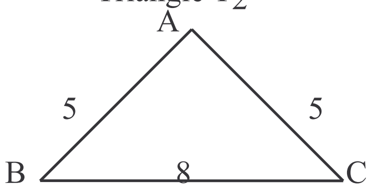
A) Calcul d'aires

Calculer l'aire des triangles T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, et T_7 et ainsi que la longueur exacte de chaque côté.

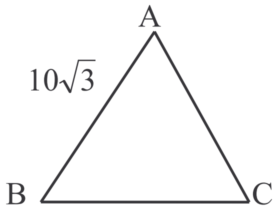
Triangle T_1



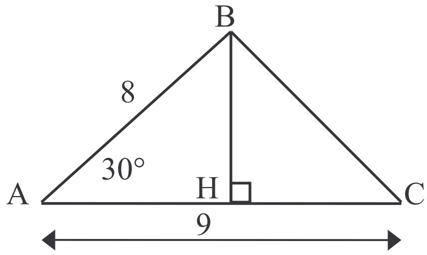
Triangle T_2



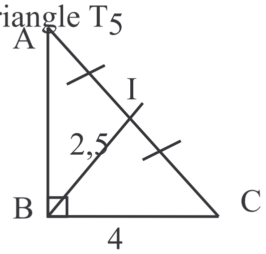
Triangle T_3(équilatéral)



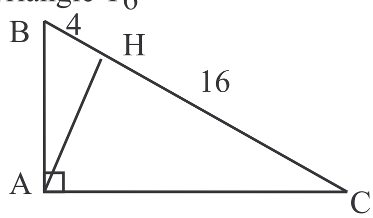
Triangle T_4



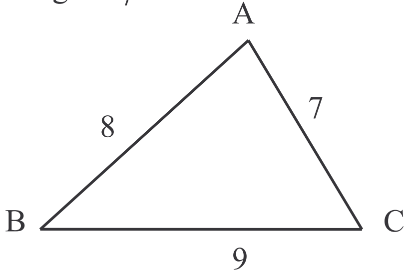
Triangle T_5



Triangle T_6



Triangle T_7



Le calcul de l'aire du triangle T_7 présente des difficultés.

Commentaires et prolongements

Exploiter les démarches utilisées par les élèves pour rappeler les relations métriques dans un triangle rectangle.

Le calcul de l'aire du triangle T_7 présente des difficultés.
Il est cependant possible d'obtenir le résultat, mais ce n'est pas à faire dans le cadre de ce chapitre.

B) Construction.

Construire un triangle ABC connaissant les mesures a, b et c de chacun des côtés :

a=9 cm b=7 cm c=8cm.

Faire observer l'unicité de l'aire de la figure. Tracer une hauteur et évaluer l'aire de ce triangle.

II Formule de HÉRON

Cours

On démontre et on admettra la formule de Héron, qui permet de calculer l'aire S d'un triangle en utilisant uniquement la longueur des trois côtés.

Soit ABC un triangle. On note a, b, et c les longueurs des trois côtés, p le demi-périmètre

$p = \dfrac{a + b + c}{2}$ et S l'aire du triangle, on a : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Insister sur la définition de p

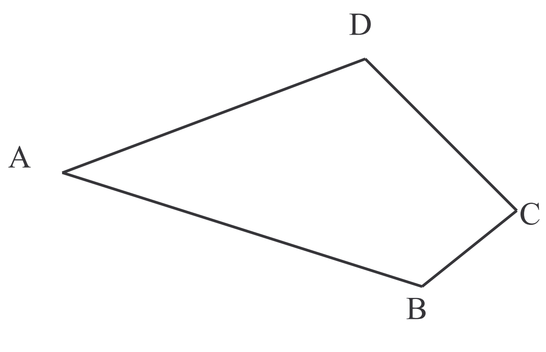
1) Vérifier cette formule pour les triangles $T_{1,}$ $T_{2,}$ $T_{3,}$ $T_{4,}$ $T_{5,}$ et T_6
2) Calculer l'aire du triangle T_7.

Comparer avec l'évaluation obtenue précédemment

3) **Exercice**

Une parcelle de terrain ABCD a la forme et les dimensions données par la figure ci-dessous :

AB=835m AD=750m BD=796m CD=734,3 et BC=205m.



a) Calculer l'aire du triangle ABD.
b) Déduire la mesure de la hauteur issue du point A dans le triangle ABD.
c) Calculer l'aire du quadrilatère ABCD.
d) Ce terrain est ensemencé de gazon. Cela nécessite 1 kg de semence par are. Calculer la quantité de semence nécessaire pour ensemencer ce terrain.

CLASSE :	1 ère bac pro	**OBJECTIF GÉNÉRAL** *Calcul d'aires dans un triangle quelconque (introduction de la formule de HÉRON)*
MODULE:	MP1	
CHAPITRE :	Relations métriques dans un triangle	**PRÉ-REQUIS** *Relations métriques et calculs trigonométriques dans un triangle rectangle*
DURÉE :	2 fois 1 heure	

Les deux heures indiquées se décomposent de la façon suivante :

1 ère heure

On reprend l'activié I de la feuille donnée en page 6 (classe de BEPA) pour introduire la formule de HÉRON en classe de première du bac pro.

2 ème heure

Cours

On démontre et on admettra la formule de HÉRON, qui permet de calculer l'aire S d'un triangle en utilisant uniquement la longueur des trois côtés.

Soit ABC un triangle. On note a, b, et c les longueurs des trois cotés, p le demi-périmètre ($p = \dfrac{a+b+c}{2}$) et S l'aire du triangle, on a :
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Insister sur la définition de p.

Exercice 1

1) Vérifier cette formule pour les triangles T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 et T_6.
2) Calculer l'aire du triangle T_7
3) Montrer que dans le cas d'un triangle équilatéral dont la mesure du côté est a, la formule précédente s'écrit $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$
4) Montrer que dans le cas d'un triangle isocèle (on prendra par exemple b=c) la formule de HERON s'écrit :
$S = \dfrac{1}{2}a\sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{4}}$. Que représente $\sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{4}}$?

C'est l'occasion de faire du calcul littéral.

Attention : Pour obtenir la formule de Héron dans le cas d'un triangle rectangle ($a^2=b^2+c^2$) ou plus généralement dans le cas d'un triangle quelconque, cela nécessite des calculs littéraux qui ne sont pas à faire dans le cadre de l'enseignement en bac pro.

Si l'on veut savoir démontrer la formule de Héron.

Exercice 2

Dans un triangle ABC, on donne AB=4,5 ; AC=5,3 et BC=8,5.
a) Calculer l'aire du triangle ABC.
b) Calculer la longueur de la hauteur issue du point A.
c) Déterminer à un degré près, la mesure de chacun des angles du triangle.
d) Calculer le rayon du cercle circonscrit au triangle.

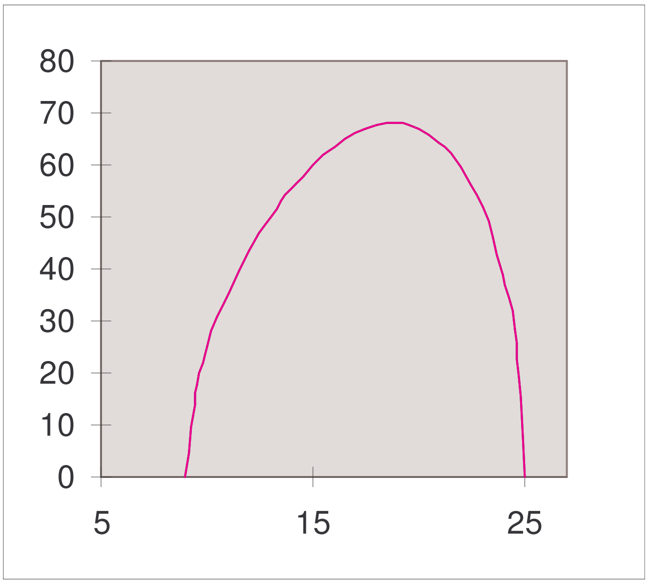
Exercice 3

Cet exercice peut tout aussi bien être fait en classe de BEPA que dans la classe de baccalauréat professionnel. Il est souhaitable de le faire en utilisant un tableur.

Utilisation du tableur Excel. Représentation d'une fonction avec ce tableur.

Soit un triangle ABC tel que AB=17 et AC=8.
On note x la longueur du segment [BC].

1) Pour chaque valeur de x que l'on fera varier de 9 à 25, calculer l'aire du triangle ABC, en utilisant la formule de Héron.
2) Faire la représentation graphique de la fonction qui à x fait correspondre l'aire du triangle correspondant.
3) Déduire des résultats obtenus la longueur du côté [BC] lorsque l'aire est égale à 60.
4) Pour quelle valeur de x l'aire est-elle maximum ?
   Que pouvez-vous dire du triangle ?
   Justifier ce résultat .



Bibliographie :

La démonstration mathématiques dans l'histoire. Edition IREM de Besançon et IREM de Lyon. Diffusion IREM de Lyon.
La géométrie du triangle Yvonne et René SORTAIS Hermann
Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques (Un PAE dans le second cycle page 293 et suivantes). Bulletin Inter-IREM.