A LA DÉCOUVERTE DES DIFFÉRENTES MOYENNES

Les 5 activités ci-dessous concernent les différentes moyennes (arithmétique, géométrique, harmonique et quadratique) utilisées, certaines fois sans le savoir, dans la vie courante. Il est possible de traiter ces activités en groupe, en module, en devoir à la maison dans les classes de seconde générale, bac technologique voire bac professionnel. Cependant, il convient de noter que l'activité de synthèse numéro 5 (qui n'est pas obligatoire) faisant intervenir un peu plus de calcul algébrique, est plus difficile pour les élèves de bac professionnel. Il est aussi possible de traiter cette dernière activité en s'aidant des relations métriques dans le triangle rectangle.

Activité n°1 : **moyenne arithmétique, arithmétique pondérée et élaguée**.

1) Les notes sur 20, obtenues en Mathématiques par un élève au cours du trimestre, sont les suivantes :

Devoirs	**DS1**	**DS2**	**DS3**	**DM1**	**DM2**
Notes	9	12	7	15	13

   a) Calculer la moyenne trimestrielle de cet élève si les notes ne sont affectées du même coefficient.

   b) Si les trois devoirs surveillés sont affectés du coefficient 4 et les deux devoirs à la maison affectés du coefficient 2, calculer à nouveau la moyenne de cet élève.

Dans le cas a), on a calculé la moyenne arithmétique des notes.

La moyenne arithmétique m_a de n nombres x_1, x_2, … , x_n (avec n un entier strictement supérieur à 1) est le quotient de leur somme par n.

$$m_a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \textit{soit aussi} \quad m_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Dans le cas b), on a calculé la moyenne arithmétique pondérée des notes.

Soit les nombres x_1, x_2, … , x_n affectés respectivement des coefficients c_1, c_2, … , c_n (avec n un entier strictement positif). La moyenne arithmétique m_{ap} de ces nombres, pondérée par les coefficients c_1, c_2, … , c_n est :

$$m_{ap} = \frac{c_1\,x_1 + c_2\,x_2 + \ldots + c_n\,x_n}{c_1 + c_2 + \ldots + c_n} \quad \textit{soit aussi} \quad m_{ap} = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i\,x_i}{\sum_{i=1}^{n} c_i} \quad \textit{avec} \quad \sum_{i=1}^{n} c_i \neq 0$$

c) Le professeur a oublié la note du DS4 qui est de 8 sur 20, affectée du coefficient 4. Calculer à nouveau la moyenne de cet élève.

2) En natation, le ballet est une discipline olympique composée de deux programmes que dispute chaque équipe de nageuses. Il y a le programme technique et le programme libre. Chaque programme est noté par deux groupes de cinq juges (un groupe notant la technique, l'autre notant l'artistique).

Dans chaque groupe de juges :

- ⇨ chaque juge accorde une note sur 10,
- ⇨ on élimine la note la plus basse et la note la plus haute,
- ⇨ puis on effectue la moyenne des trois notes restantes.

Pour chaque programme :

- ⇨ la moyenne du groupe de juges notant la partie technique affectée du coefficient 6,
- ⇨ la moyenne du groupe de juges notant la partie artistique affectée du coefficient 4,
- ⇨ la moyenne pondérée de ces deux derniers nombres constitue la moyenne du programme.

Le programme technique compte pour 35 % de la note finale, tandis que le programme libre compte pour 65 % (pourcentages proportionnels aux durées des programmes).

a) Vérifier que la note finale de l'équipe d'Australie, arrondie à 10^{-2} près, est 7,92.

Équipe d'Australie	Juges notant la technique					Juges notant l'artistique				
Programme technique	8,2	8,0	8,6	7,9	8,4	7,6	7,8	8,6	7,2	7,9
Programme libre	7,8	7,9	8,7	7,5	8,4	7,5	7,5	8,2	7,5	7,8

b) On donne ci-dessous les notes des deux autres équipes finalistes de la compétition. Déterminer, en justifiant les réponses, l'équipe qui a gagné la médaille d'or, celle qui a gagné la médaille d'argent et celle qui a gagné la médaille de bronze.

Équipe des États-unis	**Juges notant la technique**					**Juges notant l'artistique**				
Programme technique	5,6	6,2	5,9	5,7	6,9	6,5	6,4	5,6	6,0	7,2
Programme libre	5,9	6,0	5,8	5,6	7,5	6,5	6,8	5,9	6,2	7,8

Équipe d'Espagne	**Juges notant la technique**					**Juges notant l'artistique**				
Programme technique	8,7	8,0	8,2	7,8	8,4	7,1	7,6	7,8	8,5	7,9
Programme libre	8,6	7,9	7,8	7,6	8,4	7,3	8,1	7,5	7,8	7,5

Dans les calculs précédents on a déterminé, entre autre, ***la moyenne élaguée*** de la série statistique.

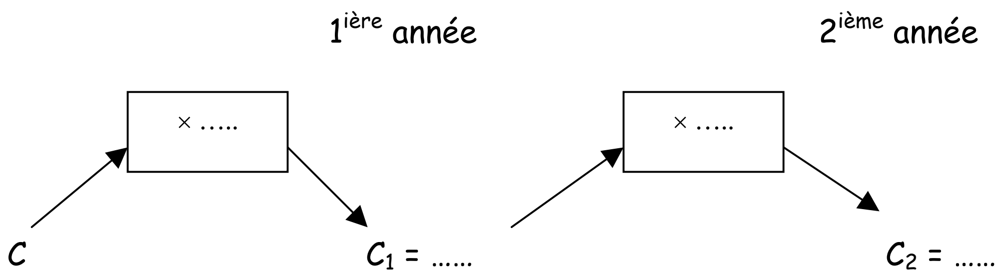
Si, dans une série de données, une(des) valeur(s) paraît (paraissent) aberrante(s) ou peut (peuvent) être considérée(s) comme telle(s) (s'il s'agit d'une erreur de mesure ou de saisie par exemple), il est possible de la (les) supprimer. La moyenne calculée sans cette(ces) valeur(s)) est dite moyenne élaguée.

Activité n°2 : **moyenne géométrique**.

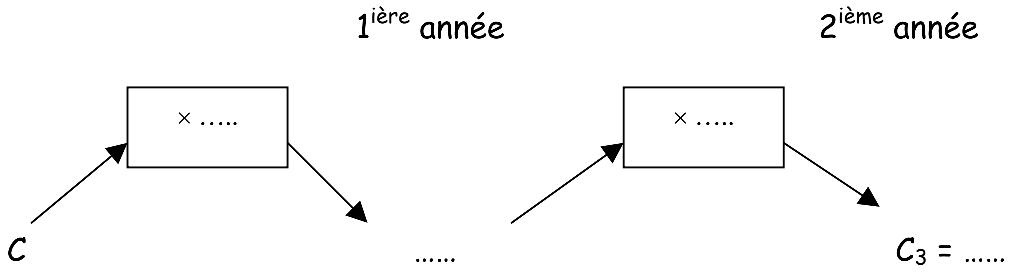
1) Un rectangle a pour longueur 9 et pour largeur 4. Calculer la longueur a du côté du carré qui a la même aire que ce rectangle.

2)

a) Une banque *A* offre une possibilité de placement à intérêts composés pour un capital *C*. Elle prévoit un taux d'intérêt de 3 % pour la première année et de 7 % pour la seconde année.
Déterminer le coefficient multiplicateur r_1 qui permet de passer du capital C au capital C_1 disponible à la fin de la première année.
Déterminer le coefficient multiplicateur r_2 qui permet de passer du capital C_1 au capital C_2 disponible à la fin de la seconde année.
En déduire, en fonction de r_1 et r_2, le coefficient multiplicateur qui permet de passer de C à C_2 et compléter le schéma ci-dessous.

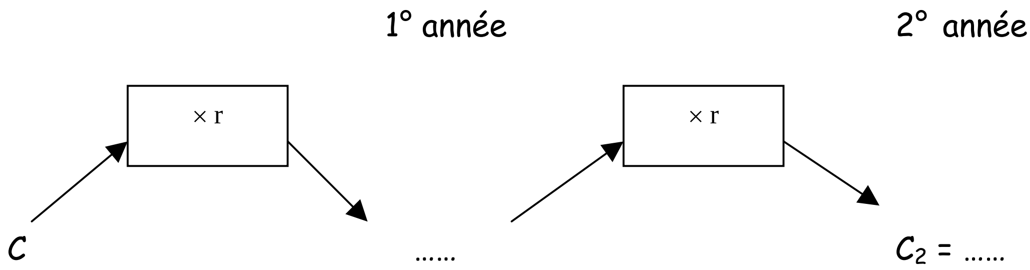


b) Une autre banque B offre une possibilité de placement à intérêts composés pour le même capital C. Elle prévoit pour les deux années un taux d'intérêt constant égal à 5 % chaque année.
Exprimer, en fonction de C, le capital C_3 obtenu en plaçant dans cette banque B le capital C pendant deux ans.
En déduire le coefficient multiplicateur qui permet de passer de C à C_3 et compléter le schéma ci-dessous.



c) Au bout de deux ans, dispose-t-on du même capital dans les deux banques ? Conclure.

d) On suppose que la banque A propose maintenant un taux d'intérêt constant sur les deux ans afin d'obtenir, à partir du capital C, le même capital C_2. Soit r le coefficient multiplicateur qui permet de passer du capital initial C à celui obtenu à la fin de la première année. On a le schéma :



Compléter les pointillés en fonction de r et C.

e) Déduire des questions a) et d) la relation entre r, r_1 et r_2. Calculer r.

f) ***La moyenne géométrique de deux nombres réels strictement positifs a et b est le nombre positif m_g vérifiant $m_g^2 = a \times b$ c'est-à-dire $m_g = \sqrt{ab}$.***
Calculer la moyenne géométrique des réels 1,03 et 1,07. Que retrouve-t-on ?

<u>Activité n°3</u> : **moyenne harmonique.**

Alex se déplace en VTT. Sa vitesse à l'aller est de 20 km/h et celle au retour est de 30 km/h.
On désigne par d la distance en km parcourue à l'aller.
Le but de l'exercice est de calculer sa vitesse moyenne v sur l'ensemble du parcours.

1) *<u>Résolution algébrique</u>*

a) Exprimer la distance totale parcourue en fonction de d.

b) Soit t_1 le temps (en h) correspondant au trajet de l'aller. Exprimer t_1 en fonction de d.

c) Soit t_2 le temps (en h) correspondant au trajet du retour. Exprimer t_2 en fonction de d.

d) Montrer que le temps total $t_1 + t_2$, en fonction de d, s'exprime par la relation :

$$t_1 + t_2 = \frac{d}{12}$$

e) Exprimer la vitesse moyenne v sur l'ensemble du parcours en fonction de d, t_1 et t_2.

f) A l'aide des questions précédentes, calculer v.

g) La vitesse moyenne dépend-elle de la distance parcourue ? Justifier la réponse.

2) *<u>Résolution graphique</u>*

a) La vitesse moyenne ne dépendant pas de la distance d, on peut choisir arbitrairement d = 60 km. Le choix de 60 permet de simplifier les calculs (60 est le P.P.C.M. des entiers 20 et 30) et le raisonnement, mais ce choix n'est pas obligatoire. Compléter alors les pointillés ci-dessous.

Au total Alex a parcouru y = …… km en …… h à l'aller et …… h au retour soit x = …… h au total.

b) Dans un repère d'origine O où x représente le temps de parcours (en h) et y la distance parcourue (en km), placer le point A (x ; y). Tracer la droite (OA).
<u>Échelle</u> : en abscisse, 2 cm pour 1 heure et en ordonnée, 1 cm pour 10 km.

Déterminer graphiquement la distance parcourue en 1 heure. En déduire la vitesse moyenne v cherchée.

c) ***La moyenne harmonique de deux nombres réels a et b strictement positifs est le nombre m_h vérifiant :***

$$\frac{2}{m_h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Montrer que $m_h = \frac{2ab}{a+b}$.

d) Calculer la moyenne harmonique des nombres 20 et 30. Quel résultat retrouve-t-on ?

<u>Activité n°4</u> : moyenne quadratique.

Soit un rectangle dont la mesure des côtés est L et l et un carré dont la mesure du côté est c.

1) Exprimer la mesure de la diagonale du carré en fonction de c.

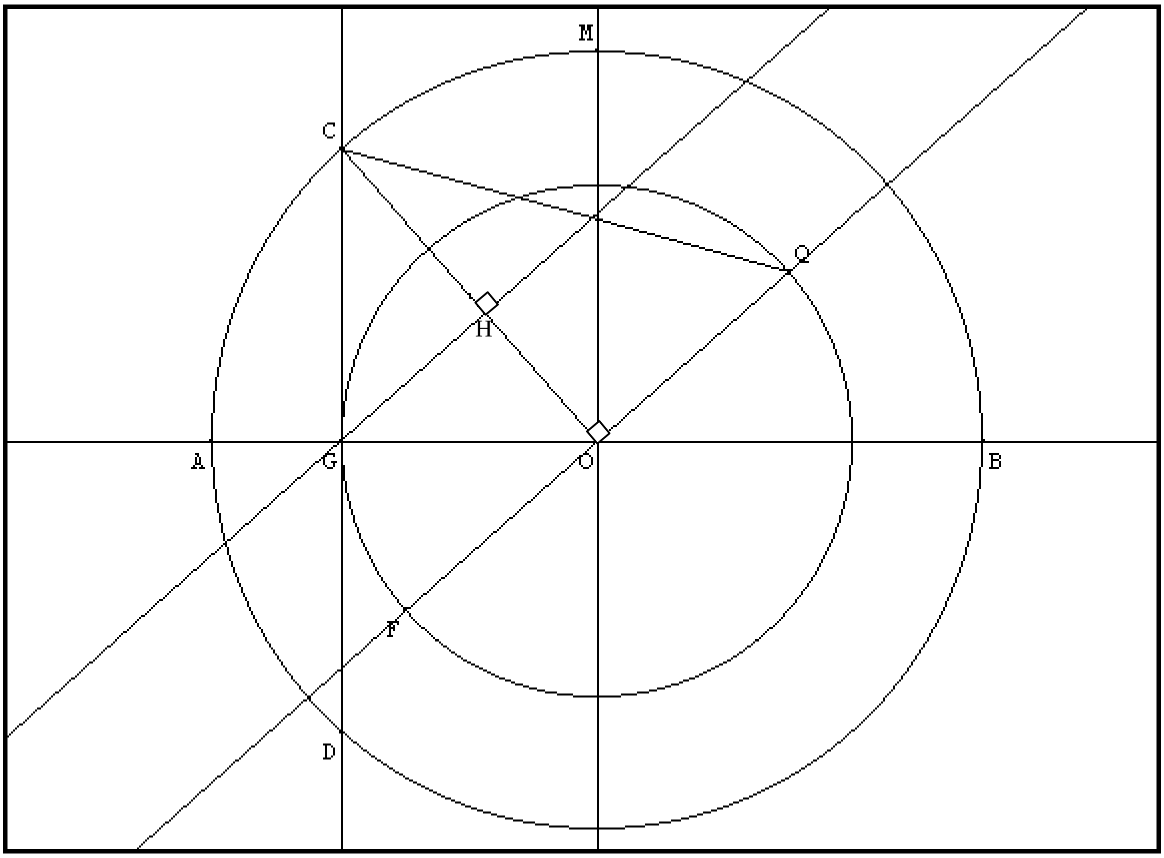
2) Exprimer la mesure de la diagonale du rectangle en fonction de L et l.

3) Déterminer c de telle manière que le carré et le rectangle aient des diagonales de même mesure.

La moyenne quadratique de deux nombres réels a et b strictement positifs est le nombre m_q vérifiant :

$$m_q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

Activité n°5 : Soit la figure ci-dessous dans laquelle AG = a et GB = b.



1) Soit m la mesure du segment [OM].

   a) Exprimer m en fonction de a et de b.

   b) A quel type de moyenne correspond m ?

2) Soit g la mesure du segment [CG].

   a) Exprimer la tangente de l'angle $\hat{B}$ dans le triangle CBG en fonction de b et de g.

   b) Exprimer la tangente de l'angle $\hat{C}$ dans le triangle ACG en fonction de a et de g.

   c) Que peut-on dire des angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$?

   d) Déduire des questions 2a), 2b) et 2c) l'expression de g en fonction de a etde b.

   e) A quel type de moyenne correspond g ?

3) Soit h la mesure du segment [CH].

a) Exprimer le cosinus de l'angle $\hat{C}$ dans le triangle OCG en fonction de g et de m.

b) Exprimer le cosinus de l'angle $\hat{C}$ dans le triangle GCH en fonction de g et de h.

c) Déduire des questions 3a) et 3b) l'expression de h en fonction de g et de m.

d) Utiliser les questions 1a) et 2d) pour exprimer h en fonction de a et de b.

e) A quel type de moyenne correspond h ?

4) Soit q la mesure du segment [CQ].

a) Exprimer OG en fonction de a et de b.

b) En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OCQ, exprimer q en fonction de a et de b.

c) A quel type de moyenne correspond q ?

5) Prouver, en justifiant les résultats successifs, que $h \leq g \leq m \leq q$.

6) Que se passe t-il pour les différentes moyennes si a = b ?

Merci à Morgane, Karine, Loïc, Luis et Patrick, qui se reconnaîtront…