

LA TRIANGULATION

I UN PEU D'HISTOIRE

Depuis plus de 2000 ans les savants pensent que la terre est sphérique.

Pour s'y repérer ils commencent par la **quadriller** :

Dicéarque, **Eratosthène**, Hipparque de Nicée, **Ptolémée**, ou encore Pitéas, le géographe astronome navigateur de la cité phocéenne de Marseille, se penchent sur ce problème.

En France en 1525, le mathématicien Fermel part de Paris vers le nord. Au quatrième jour de son voyage il s'arrête aux environs d'Amiens. La hauteur du soleil à midi lui indiquant qu'il avait parcouru un degré d'arc de méridien, il revient à Paris par le même chemin, dans un carrosse dont il a étalonné le tour de roue.

Après avoir compté le nombre de tours de roue, il détermine une longueur en toises de l'époque équivalente à 110,6 km, au lieu des 111,12 km réels.

Plus tard le quadrillage fut remplacé par la triangulation.

Au XIII^e siècle, Léonard de Pise met au point les premiers rudiments de la trigonométrie permettant ainsi la détermination de la largeur d'un fleuve ou de la hauteur d'une tour : mesures que l'on ne peut faire directement.

En 1615, le Hollandais Snellius mesure par triangulation l'arc de méridien entre deux villes de Hollande.

En France, en 1663, Colbert fonde l'Académie Royale des Sciences. En 1667, Louis XIV crée l'observatoire de Paris.

A cette époque, l'abbé Picard, équipé d'une lunette de visée, mesure, à l'instar de Snellius, le degré de méridien entre Sourdon, près d'Amiens, et Malvoisie près de Paris. Il trouve une longueur en toises équivalente à 111,21 km.

A cette époque, tout le monde pense que la Terre est parfaitement sphérique et les savants tels Roberval, Picard, Huygens, Newton préconisent déjà *une unité de longueur de base universelle*, concrétisée par un étalon *choisi dans la nature*.

En 1670, Gabriel Mouton, vicaire de Saint-Paul à Lyon, propose la Virga égale à la millième partie de la longueur d'une minute d'angle du méridien, soit 1852 m actuels, et, première initiative du genre, il propose également des multiples décimaux à l'instar de la numérotation en usage dans l'Antiquité en Egypte et en Grèce.

En 1673, Richer, envoyé à Cayenne pour des observations astronomiques, découvre que la longueur du pendule battant la seconde est plus courte à Cayenne qu'à Paris. Donc la terre n'est pas tout à fait sphérique : elle doit être aplatie aux pôles, conformément à l'hypothèse émise par Newton sur l'attraction universelle en 1666.



Richer in Cayenne

A la fin du XVII^{ème} siècle, la mesure **par triangulation de l'arc de méridien de plus de neuf degrés entre Dunkerque et Perpignan** est décidée par Lahire et par Jean-Dominique Cassini, directeur de l'Observatoire de Paris. Commencée en 1701 et terminée en 1718 par Cassini Fils, dit Cassini II, l'opération fut entachée d'un certain nombre d'incertitudes qui seront définitivement levées grâce à la double expédition de La Condamine à l'équateur au Pérou et de Maupertuis au pôle nord en Laponie pour y mesurer la longueur d'arc des méridiens concernés et mettre en évidence l'aplatissement de la Terre aux pôles.



II Vers une mesure universelle

« Il n'y a qu'une mesure puisée dans le sein de la nature, une mesure constante, inaltérable, vérifiable dans tous les temps qui puisse par ses avantages arracher le consentement de tous les peuples ».

La Condamine 1747

Sous la royauté, les droits des poids et mesures avaient été accaparés par les seigneurs locaux qui imposaient ainsi leurs mesures et leurs unités.

Dès le début du XVI^{ème} siècle, la royauté, qui rétablissait son autorité, a cherché sans réel succès à restreindre ce monopole économique en tentant d'unifier les systèmes des poids et mesures.

Cette unification nécessaire au développement sans cesse grandissant des échanges commerciaux supposait donc une révolution sociale autant que scientifique et on retrouve jusqu'en 1789 un cahier de doléances demandant que « la mesure de blé des seigneurs pour la perception des rentes n'excède pas celle du siège royal le plus proche ».

C'est la révolution française qui en abolissant les droits féodaux supprimera le monopole seigneurial des poids et mesures.

L'Académie des Sciences crée une commission à laquelle appartiennent Borda, Lavoisier, Condorcet, Cassini, Lagrange, Laplace, Monge. Elle adopte le système décimal pour diviser et sous diviser les nouvelles mesures.

Le 19 septembre 1789, sur proposition de Borda, elle choisit **le nom de mètre** et suggère d'effectuer la mesure d'un arc de part et d'autre du 45^{ème} parallèle.

En 1791, Delambre et Méchain sont chargés par l'assemblée constituante de ce travail. Ils partent mesurer la longueur du méridien passant par Paris entre Dunkerque et Barcelone avec point de jonction à Rodez.

III Principe de la triangulation

Pour calculer la longueur de l'arc de méridien, Delambre et Méchain réalisent durant 7 ans des mesures qui vont « enfermer » celui-ci dans une chaîne de 94 triangles.

Dunkerque et Barcelone étant situées à la même longitude, on s'appuiera pour le calcul sur le résultat de trigonométrie classique : la connaissance de deux angles et d'une longueur permet de résoudre un triangle, c'est à dire de déterminer les longueurs de tous ses côtés et les mesures de tous ses angles (voir exercice page suivante).

La triangulation s'appuie ainsi de manière quasi exclusive sur des mesures d'angles :

- mesures des angles de chacun des triangles à l'aide d'instruments d'une précision inconnue jusqu'alors (cercle répétiteur de Borda notamment).
- mesures des angles formés par les côtés des triangles avec la direction du méridien (direction Nord-Sud).

Une unique mesure de longueur sera nécessaire sur le terrain et prise à l'aide de règles plates : celle de la base située à Melun (une deuxième base est construite pour vérification près de Perpignan). Voir annexe sur la mesure de la base.

Une fois la longueur de l'arc connue, il restera à déterminer son amplitude par un calcul astronomique pour connaître la longueur du quart du méridien. La dix millionième partie de cette longueur est le mètre.

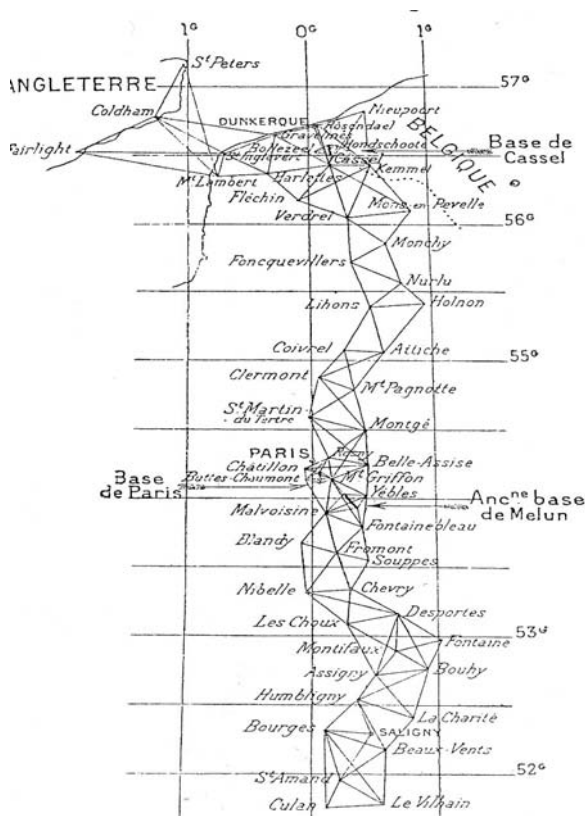


Fig. 39^b.

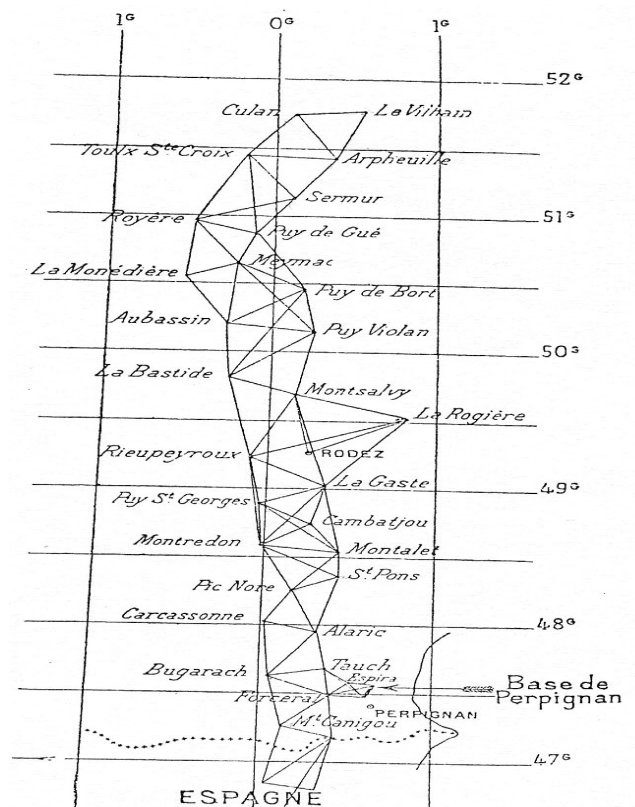


Fig. 39^a.

IV Exercice

Le but de cet exercice est de calculer la distance AE.

Pour cela, on a « enfermé » le segment correspondant dans une chaîne de trois triangles, et on a réalisé les mesures angulaires portées sur le schéma.

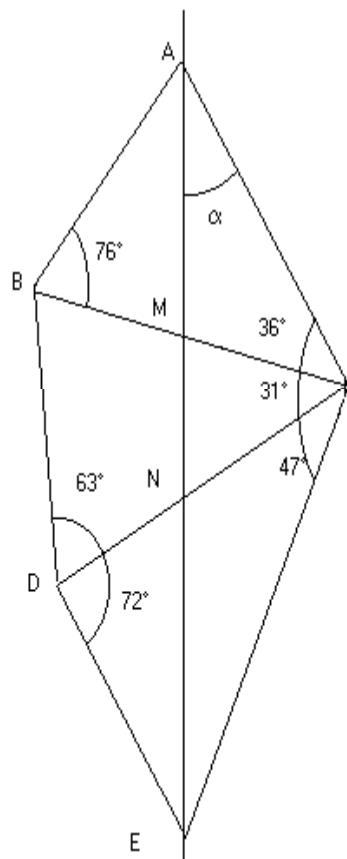
On dispose d'une unique distance, AC et on a $AC = 250$ m.

L'angle α a pour mesure 27° .

1°) Calculer les distances AM et MC.

2°) Calculer les distances MN et NE.

En déduire la distance AE.



V Compléments d'information

- Bien entendu les sommets des triangles n'étant pas situés à la même hauteur, les triangles sont « inclinés ». On a donc mesuré l'angle que faisait chacun d'eux avec la verticale pour se ramener à l'horizontale.
- Les triangles obtenus sont *rectilignes*; or on mesure un arc *curviligne*. Le mathématicien Legendre apportera les corrections nécessaires aux calculs en se tenant à la forme elliptique de la terre (le rayon équatorial de la terre est de 6 378,14 km alors que le rayon polaire est de 6 356,75 km).
- Enfin, contrairement à ce qui est donné en exemple dans l'exercice précédent, l'unité de mesure utilisée pour mesurer les bases ne fût pas le mètre (et pour cause !). Les scientifiques utilisèrent la toise du Pérou.

La longueur de l'arc terrestre Dunkerque-Barcelone ainsi mesurée géodésiquement est de 551 584,7 toises du Pérou (la référence internationale de 1980 est de 551 589,3).

- Dans cette chaîne de triangles où tous les angles sont mesurés, il faut bien sûr faire la mesure de la longueur d'un côté de l'un des triangles, côté qui est appelé base.

En fait pour faire des vérifications, deux bases seront mesurées distantes de 700 km, l'une à Melun en Seine et Marne d'une longueur de 12 km, et l'autre près de Perpignan.

A partir de la première base on peut connaître la seconde et vice versa. Les calculs de l'époque montrent une erreur de 3 cm pour des bases de 12 km !

Eléments de bibliographie :

- ✓ Denis Guedj : *Le système métrique décimal*, TDC N°781.
- ✓ Revue Tangente N°83 Novembre-Décembre 2001.
- ✓ Denis Guedj : *Le mètre de monde*, Editions du Seuil.
- ✓ A.Colin, E.Borel : *Trigonométrie 2^{ème} cycle* (1905).
- ✓ J.C.Hocquet : *Métrologie historique*, Encyclopédia universalis.