Thème de seconde : les solides de Platon

A titre d'exemple, nous vous proposons dans ce bulletin un travail, inspiré de manuels scolaires, réalisé à L'E N F A par nos collègues, stagiaires ou ex-stagiaires PCEA (Gemond Denis, Métailler Anne, Zouggar Abdelaziz et Tout Mohamed) lors d'un stage.

I Recommandations pédagogiques

Dans le document d'accompagnement du programme de mathématiques de la classe de seconde, on évoque entre autre la place des thèmes.

Place des thèmes.

… « Pour chacun des chapitres (statistique, calcul et fonctions, géométrie), l'enseignant doit choisir un ou plusieurs thèmes dans la liste proposée par le programme. Divers éléments interviendront pour ce choix : les centres d'intérêt des élèves, les projets d'orientation, les préférences de l'enseignant, les documents disponibles, le style de travail souhaité, les concepts et outils mathématiques à réinvestir, le niveau de difficulté ou d'abstraction, etc. Plusieurs thèmes pourront être traités simultanément dans la classe.

Comme il est indiqué, il s'agit de "faire vivre l'enseignement au-delà de l'évaluation sur les capacités attendues" explicitées par le programme ; cela signifie d'abord que les programmes ultérieurs ne considéreront pas comme acquis en seconde les éventuels contenus nouveaux accessibles à travers l'étude de certains thèmes ; cela signifie ensuite que le travail sur les thèmes vise des capacités plus générales telles les capacités à chercher et utiliser une documentation, à réinvestir des acquis antérieurs, à produire un document écrit ou oral de synthèse, etc. ; cela signifie encore que devraient être privilégiées ici des dimensions souvent difficiles à mettre en place dans le cadre normal du cours : plaisir du questionnement et de la découverte, incitation à la curiosité, etc. Le programme ne donne pas d'indication de durée pour le travail sur les thèmes : l'équivalent d'une semaine au moins devrait y être réservée pour chacun des trois chapitres »

Liste des thèmes proposés

Statistique

- *Simulations d'un sondage ; à l'issue de nombreuses simulations, pour des échantillons de taille variable, on pourra introduire la notion de fourchette de sondage, sans justification théorique. La notion de niveau de confiance 0,95 de la fourchette peut être introduite en terme de "chances" (il y a 95 chances sur 100 pour que la fourchette contienne la proportion que l'on cherche à estimer) ; on pourra utiliser les formules des fourchettes aux niveaux 0,95, 0,90 et 0,99 pour une proportion observée voisine de 0,5 afin de voir qu'on perd en précision ce qu'on gagne en niveau de confiance. On incitera les élèves à connaître l'approximation usuelle de la fourchette au niveau de confiance 0,95, issue d'un sondage sur n individus (n>30) dans le cas où la proportion observée p est comprise entre 0,3 et 0,7, à savoir :* $\left[\hat{p}-1/\sqrt{n};\hat{p}+1/\sqrt{n}\right]$.
- *Simulations de jeux de pile ou face : distribution de fréquences du nombre maximum de coups consécutifs égaux dans une simulation de 100 ou 200 lancers de pièce équilibrée ; distribution de fréquences du gain sur un jeu d'au plus dix parties où on joue en doublant la mise (ou en la triplant) tant qu'on n'a pas gagné. On pourra aussi faire directement l'expérience avec des pièces pour bien faire sentir la notion de simulation..*
- *Simulations du lancer de deux dés identiques et distribution de la somme des faces. On pourra aussi faire directement l'expérience avec des dés pour bien faire sentir la notion de simulation....*
- *Simulations de promenades aléatoires sur des solides ou des lignes polygonales, fluctuation du temps et estimation du temps moyen mis pour traverser un cube ou pour aller d'un sommet donné à un autre sommet donné d'une ligne polygonale.*

- *Simulations de naissances : distribution du nombre d'enfants par famille d'au plus quatre enfants lorsqu'on s'arrête au premier garçon, en admettant que pour chaque naissance, il y a autant de chances que ce soit un garçon ou une fille.*

Calcul et fonctions

- *Calculatrices et grands nombres.*
- *Etude détaillée d'un exemple concret de fonction (tarifs téléphoniques, montant de l'impôt en fonction du revenu) : lecture de texte, représentation graphique, variations.*
- *Sur tableur, explicitation des différentes étapes du calcul d'une formule en appliquant d'une colonne à l'autre une seule opération (+, –, x, /, carré,* $\sqrt{\ }$ *,…). Explicitation de l'enchaînement des fonctions conduisant de x à f(x). Recherche de la formule permettant de passer de la cellule donnant f(x) à la valeur de la cellule recevant x.*
- *Problèmes historiques sur les nombres, irrationalité de* $\sqrt{2}$ *, crible d'Ératosthène, …*
- *Croissance et fonction du temps. Suites de données annuelles : mesure absolue f(t + 1) – f(t) et mesure relative (coefficient multiplicateur)) f(t+1)/f(t). On observera que l'évolution relative n'est pas visible sur un graphique à graduation régulière.*
- *Construction, prévision des variations de la somme ou de la différence de fonctions données par leurs représentations graphiques (on pourra se servir de la demi somme, plus facile à construire, pour prévoir les variations de la somme).*
- *Caractérisation des éléments de* $\mathbb{D}$ *et de Q soit en terme de développement décimal fini ou périodique, soit comme quotient irréductible d'entiers (le dénominateur étant ou non de la forme* $2^p \times 5^q$ *).*
- *Fonction affine par morceaux conforme à un tableau de variation ou un tableau de valeurs et problèmes d'interpolation linéaire.*
- *A l'aide d'un traceur de courbes, ajustement fonctionnel d'un tableau de valeurs (issues de la physique, de l'économie,… ou reprise d'un problème important dans l'histoire des sciences). On pourra observer que les solutions sont diverses, proposer de se limiter à tel ou tel type de fonctions et s'interroger sur ce que pourrait signifier l'expression "cette solution est meilleure que telle autre". À propos d'ajustement linéaire, on réfléchira sur le fait que la description affine de y à partir de x n'implique pas de causalité entre x et y.*

Géométrie

- *Patrons de pyramides non régulières.*
- *Repérage sur la sphère; application à la géographie, à l'astronomie.*
- *Exemples de pavages périodiques du plan.*
- *Les solides de Platon.*
- *Exemples de démonstrations classiques par les aires : théorème de Pythagore, théorème de Thalès,…*
- *Représenter en perspective cavalière et en vraie grandeur une section plane d'un solide de référence dans des cas simples.*
- *Reconstitution d'un objet à partir de trois vues.*
- *Reconstitution d'un objet à partir d'une suite de coupes parallèles.*
- *Empilement de boules et cylindres de même diamètre.*
- *Exemples de réseaux dans le plan et l'espace (description, exemple des cristaux,…).*
- *Puzzle 3D (décomposition d'un cube,…).*
- *Projections orthogonales d'une sphère ou d'un disque sur un plan.*

II Une proposition de thème : Solides de Platon

A. Objectifs pédagogiques

- Connaissances de mathématiciens : Platon, Euler.
- Découverte de solides présentant certaines caractéristiques.

B. Travail des élèves

Il se décompose en quatre étapes :

- **1ère étape**

Présentation : 30 minutes	**Recherche** : 15 jours	**Synthèse** : 1 heure

- Une recherche personnelle autour de Platon et Euler et des solides concernés, à l'aide d'une fiche de questions fournie par le professeur, sera proposée aux élèves.
- Cette recherche personnelle dure quinze jours à l'issue desquels une synthèse en classe sera effectuée.

- **2ème étape**

Recherche et Synthèse : 1 heure

- En module, les élèves complètent une fiche : découverte de la formule d'Euler ; pourquoi les solides de Platon ne sont-ils que cinq ?
- Cette dernière propriété peut également être vérifiée à l'aide de pliages (voir l'article : **Pliage du Hors Série Tangente n°9 / Le plan et l'espace).**

- **3ème étape**

- On répartit ensuite les élèves en quatre groupes. Chaque groupe a des consignes à partir desquelles il réalise des patrons et des solides.
- Ce travail est présenté au bout de quinze jours à l'ensemble de la classe.
- On peut réaliser une affiche (ou plusieurs) concernant l'ensemble des recherches que l'on pourra mettre au C.D.I.

- **4ème étape**

Recherche et Synthèse : 1 heure

- Pour conclure ce thème, un prolongement en salle informatique sur différents sites permet de bien visualiser les différentes propriétés des solides de Platon.

C. Supports pédagogiques

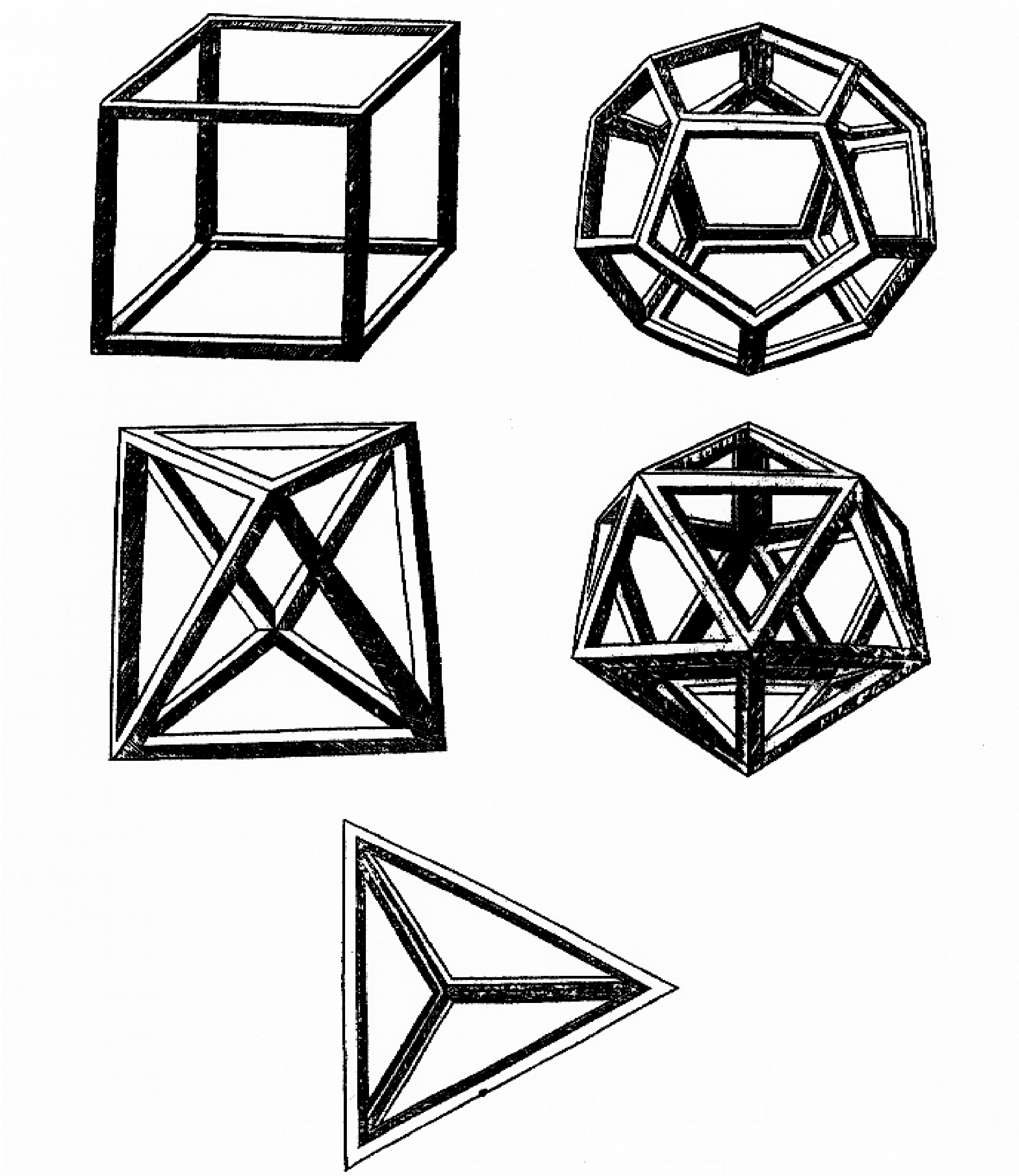
1ère étape

Liste de questions possibles :

1) Rechercher des renseignements sur Platon et Euler (ne pas dépasser 15 lignes).
2) Qu'appelle-t-on solide de Platon ?
3) Combien y en a-t-il ?
4) Quels sont leurs noms ?
5) A quels éléments Platon associe-t-il chacun de ses solides ?
6) Trouver des solides de Platon dans différents domaines (chimie, architecture...).

2ème étape

On donne ci-dessous une représentation des solides de Platon :



1. La formule d'Euler

a) A partir des observations sur les solides, compléter le tableau suivant :

Polyèdres	Nombre de faces : **F**	Nombre de sommets : **S**	Nombre d'arêtes : **A**
Tétraèdre			
Cube			
Octaèdre			
Dodécaèdre			
Icosaèdre			

b) Vers la formule d'Euler.

Le mathématicien Euler proposa la formule :

$$F + S = A + 2$$

où F est le nombre de faces, S le nombre de sommets et A le nombre d'arêtes du solide.

Vérifier cette formule pour les cinq solides de Platon.

(Remarque : il est possible de faire trouver cette formule aux élèves : « En observant les résultats obtenus dans le tableau ci-dessus, trouver une relation entre F, S et A où F est …etc. »), mais…

2. Pourquoi les solides de Platon ne sont-ils que cinq ?

Pour chacun des polyèdres, appeler a le nombre d'arêtes aboutissant à un sommet et c le nombre de côtés d'une face.

a) A partir des observations sur les solides de Platon, compléter le tableau suivant :

polyèdres	tétraèdre	cube	octaèdre	dodécaèdre	icosaèdre
a	3				
c	3				

b) Vérifier l'égalité $F \times c = S \times a = 2 \times A$ pour chacun des cinq solides.

c) Dans la formule d'Euler, remplacer F et S par leurs expressions en fonction de A.

Vérifier l'égalité $2a + 2c - ac = \frac{2ac}{A}$, puis montrer que $\frac{2ac}{A}$ est un nombre positif.

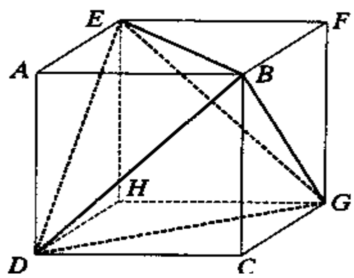
d) En déduire que $2\ (a + c) > ac$. Contrôler l'exactitude de cette relation pour chacun des cinq polyèdres.

e) Les solides de Platon vérifiant la relation obtenue au d), en existe-t-il d'autres ?

*(Remarque sur ce 2nd point : « Pourquoi les solides d'Euler ne sont-ils que cinq ? » n'est pas réellement une démonstration et la démarche est assez laborieuse ; nous pouvons aussi limiter cette partie du thème au premier point (travail sur la formule d'Euler) et par la suite montrer que les solides de Platon ne sont que cinq par pliages (voir l'article : **Pliage du Hors Série Tangente n°9 / Le plan et l'espace**).*

3ème étape

31. Consignes pour le groupe 1



Soit un cube ABFEDCGH d'arête 10 . l'unité graphique est le cm.

a) Construire deux patrons identiques du cube ABFEDCGH.

b) Avec l'un des deux patrons, construire le cube.

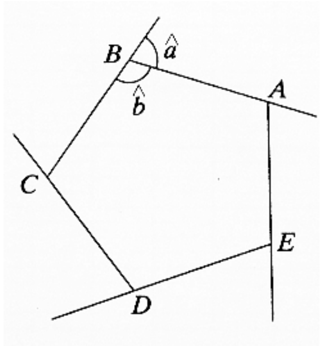
c) Montrer que $EB = 10\sqrt{2}$.

d) Démontrer que EGBD est un tétraèdre régulier.

e) Construire deux patrons identiques du tétraèdre EGBD.

f) Avec l'un des deux patrons, construire le tétraèdre EGBD.

32. Consignes pour le groupe 2



Construire un dodécaèdre régulier. Les faces du dodécaèdre sont des pentagones réguliers.

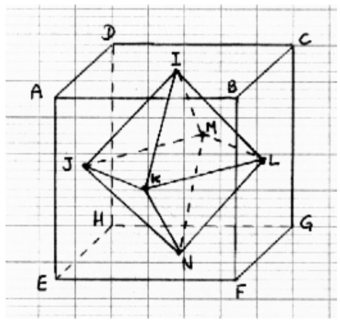
a) L'angle $\hat{a}$ est appelé angle extérieur. Pour le pentagone régulier, les angles extérieurs sont égaux. Quand on fait le tour du pentagone, de combien de degrés tourne-t-on ? En déduire que $\hat{a}$ = 72°. Que vaut $\hat{b}$?

b) Pour tracer un pentagone régulier, tracer un segment [AB] de 5 cm. Construire avec le rapporteur un angle égal à $\hat{b}$, de côtés [AB] et [BC] avec BC = 5 cm. Poursuivre la construction.

c) Tracer deux patrons identiques du dodécaèdre.

d) Construire avec l'un des patrons le dodécaèdre.

33. Consignes pour le groupe 3



Soit un cube ABCDEFGH d'arête 10. l'unité graphique est le cm.

a) Construire deux patrons identiques d'un cube ABCDEFGH.

b) Avec l'un des deux patrons, construire le cube.

c) Montrer que JI = $5\sqrt{2}$.

d) Démontrer que IJKLMN est un octaèdre régulier.

e) Construire deux patrons identiques de l'octaèdre IJKLMN.

f) Avec l'un des deux patrons, construire l'octaèdre.

34. Consignes pour le groupe 4

a) Tracer deux patrons identiques d'un icosaèdre d'arête 5.

b) Construire l'icosaèdre avec l'un des deux patrons.

4ème étape

Visualisation des solides sur quelques sites Internet :

- ac-réunion.fr (très beau),
- ac-lille.fr (liens avec la chimie, l'architecture…),
- ac-besançon.fr (quelques patrons),
- ac-noumea.fr,
- …