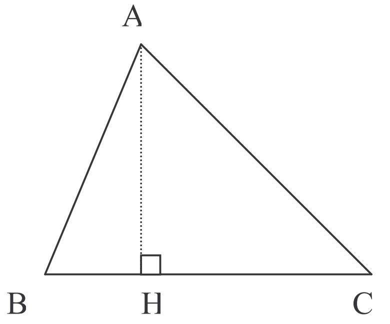
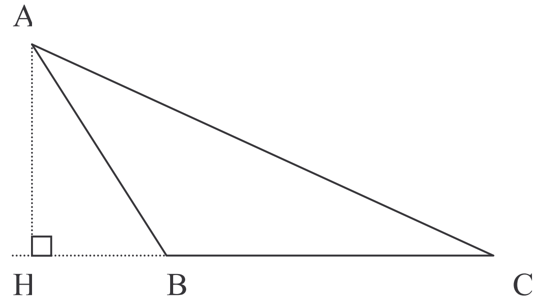
Relations métriques dans un triangle quelconque

Soit un triangle quelconque ABC non aplati, H le pied de la hauteur issue de A.
Dans tout cet article, on utilisera les notations suivantes :

a est la longueur du côté opposé à l'angle $\widehat{A}$ soit **a** = BC,
b est la longueur du côté opposé à l'angle $\widehat{B}$ soit **b** = AC,
c est la longueur du côté opposé à l'angle $\widehat{C}$ soit **c** = AB,
S est l'aire du triangle ABC.





1) Formule d'Al Kashi

a) Exprimer b^2 en fonction de AH et HC.
b) Exprimer c^2 en fonction de AH et BH.
c) Exprimer, selon que l'angle $\widehat{B}$ est aigu ou obtus, BH en fonction de HC et a.
d) Exprimer, selon que l'angle $\widehat{B}$ est aigu ou obtus, $\cos\widehat{C}$ en fonction de HC et b.
e) Démontrer la relation suivante, en envisageant les deux cas :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \times \cos \widehat{C} \qquad (1)$$

f) Sans faire de démonstration, écrire les égalités analogues obtenues pour a² et b² à partir respectivement des hauteurs issues de B et C.
g) Que devient la formule (1) lorsque le triangle est rectangle en C ?

A retenir

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \times b \times c \times \cos \widehat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \times a \times c \times \cos \widehat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \times \cos \widehat{C}$$

Quelques éléments historiques sur AL KASHI.

Al Kashi est son surnom, du lieu de naissance Kachan situé entre Ispahan et Téhéran.
Mathématicien et astronome célèbre à son époque, on ne connaît que l'année approximative de sa mort 1436 ou 1439.
On lui doit :

Le « Traité de la circonférence » (1424) où, poursuivant les travaux d'Archimède, il détermine les 16 premières décimales de π (on n'en connaissait que six avant ses travaux).

Il n'hésite pas pour cela à calculer le périmètre d'un polygone régulier approchant le cercle et possédant $3 \times 2^{28} = 805\ 306\ 368$ côtés !
Dans la base 60 qu'il utilise, la valeur qu'il donne de 2π (rapport entre la circonférence du cercle et son rayon) est :

$$\mathbf{6° \ 16' \ 59'' \ 28''' \ 1^{IV} \ 34^{V} \ 51^{VI} \ 46^{VII} \ 14^{VIII} \ 50^{IX}}$$

Le Traité de la corde et du sinus donne les premières tables trigonométriques précises (par exemple, la valeur approchée de sin(1°) avec 10 décimales exactes).

La « Clé de l'arithmétique » (1427) est une véritable encyclopédie en cinq livres des mathématiques de son temps. On y trouve, entre autres, un catalogue d'égalités concernant aires, côtés et angles de triangles. Parmi elles, l'égalité suivante qui figure aux programmes des Baccalauréats Technologiques STAE-STPA, des Baccalauréats Professionnels et du BEPA :
ABC étant un triangle dont les longueurs des trois côtés sont a, b et c, on a l'égalité
$c^2 = a^2 + b^2 - 2\ a\ b \cos \widehat{C}$.

2) Formule de Snell

a) Exprimer l'aire S du triangle ABC en fonction de AH et BC.
b) Exprimer AH en fonction de AC et $\sin \widehat{C}$.
   (On envisagera également les deux cas: $\widehat{C}$ aigu ou obtus).
c) En déduire un expression de S en fonction de a, b et $\sin \widehat{C}$.
d) Sans faire de démonstration, donner deux autres expressions de S.

A retenir	$S = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin \widehat{C}$ $S = \frac{1}{2} \times a \times c \times \sin \widehat{B}$ $S = \frac{1}{2} \times b \times c \times \sin \widehat{A}$

Quelques éléments historiques sur Snell.
Snell (1580-1626)
Astronome et mathématicien hollandais, il découvrit, avant Descartes, la loi de la réfraction de la lumière (1620) et introduisit en géodésie la méthode de triangulation.

3) Formule des trois sinus

a) A l'aide des formules de Snell, exprimer 2S de trois manières différentes.
b) En déduire que, pour tout triangle ABC, on a $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = \frac{abc}{2S}$.

A retenir :	$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = \frac{abc}{2S}$