ÉPREUVE N°6 (France métropolitaine - Réunion 2001)
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES ET TRAITEMENT DE DONNÉES
(Durée : 2 heures – Coefficient : 2)
L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Rappel ***: Au cours de l'épreuve, la calculatrice est autorisée pour réaliser des opérations de calculs, ou bien élaborer une programmation, à partir des données fournies par le sujet.***
Tout autre usage est interdit.

Exercice 1 (3,5 points)
Une urne contient 8 boules blanches et 5 boules rouges indiscernables au toucher. L'épreuve consiste à tirer au hasard, simultanément, 3 boules dans l'urne.
Soit les événements :
A : "Tirer deux boules blanches exactement parmi les trois boules tirées".
B : "Tirer exactement deux boules de la même couleur parmi les trois boules tirées".

1°) Quel est le nombre de tirages possibles ?

Les probabilités suivantes seront exprimées sous forme décimale, arrondies à 10^{-2} près.

2°) Calculer prob(A).

3°) Calculer prob(B).

Exercice 2 (4,5 points)

Le tri sélectif des ordures. Une commune a mis en place le tri sélectif des ordures. Le ramassage s'effectue de la façon suivante :

- Lundi, ramassage du sac bleu ;
- Mercredi, ramassage du sac noir ;
- Vendredi, ramassage du sac jaune.

Monsieur T est un homme distrait : il dispose chaque jour de ramassage, de façon aléatoire, un des trois sacs de couleur, indépendamment de son dépôt précédant.

1°) Quelle est la probabilité que Monsieur T, un jour de ramassage donné, dépose le bon sac ?

2°) On s'intéresse au nombre de fois où Monsieur T a déposé le bon sac pendant une période de quatre semaines consécutives. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de fois où il a déposé le bon sac.

3°) Montrer que la loi de X est la loi binomiale de paramètres 12 et $\frac{1}{3}$.

Les probabilités suivantes seront exprimées sous forme décimale, arrondies à 10^{-4} près.

4°) Déterminer la probabilité que monsieur T n'ait jamais déposé le bon sac pendant cette période de quatre semaines consécutives.

5°) Déterminer la probabilité que Monsieur T ait déposé au moins une fois le bon sac pendant cette période de quatre semaines consécutives.

<u>Exercice 3</u> (12 points)
Une couverture matelassée est composée de carrés de 10 cm sur 10 cm. Chaque carré comporte trois zones A_1, A_2, A_3 de couleurs différentes. La figure donnée en annexe représente un de ces carrés, où la zone A_3 est la partie du carré située au-dessus de la courbe (C).
Un des objectifs de cet exercice est de représenter les zones A_1 et A_2.
Les questions **1°)**, **2°)**, **3°)** sont indépendantes (sauf **3°) b)**).

1°) Les zones A_1 et A_2 sont séparées par la courbe (Γ) représentative de la fonction g définie sur l'intervalle [0 ; 10] par :

$$g(x) = (10 - x)\,e^{-\frac{x}{2}}.$$

a) Montrer que tout x de [0 ; 10], $g'(x) = \frac{1}{2}(x - 12)\,e^{-\frac{x}{2}}$.

b) Montrer que $g'(x)$ est du signe de $(x - 12)$.

c) En déduire que le signe de $g'(x)$ et le sens de variation de g sur [0 ; 10].

d) Recopier et compléter le tableau suivant :

x	0	0,5	1	2	3	4	5	7	10
$g(x)$									

Les valeurs numériques de g seront calculées à 10^{-2} près.

e) Construire la courbe (Γ) dans le repère xOy de l'annexe.

2°) A_1 est le domaine plan limité par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. A_2 est le domaine plan limité par la courbe (Γ) et la courbe (C).

a) Soit la fonction G définie sur [0 ; 10] par $G(x) = -2\,(8 - x)\,e^{-\frac{x}{2}}$. Justifier que G est une primitive de g sur [0 ; 10].

b) Hachurer la zone A_1 et calculer la valeur exacte de l'aire A_1 en cm².

3°) Les zones A_2 et A_3 sont séparées par la courbe (C) représentative de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 10] par :

$$f(x) = \frac{x^3}{200} - \frac{3x^2}{20} + 10.$$

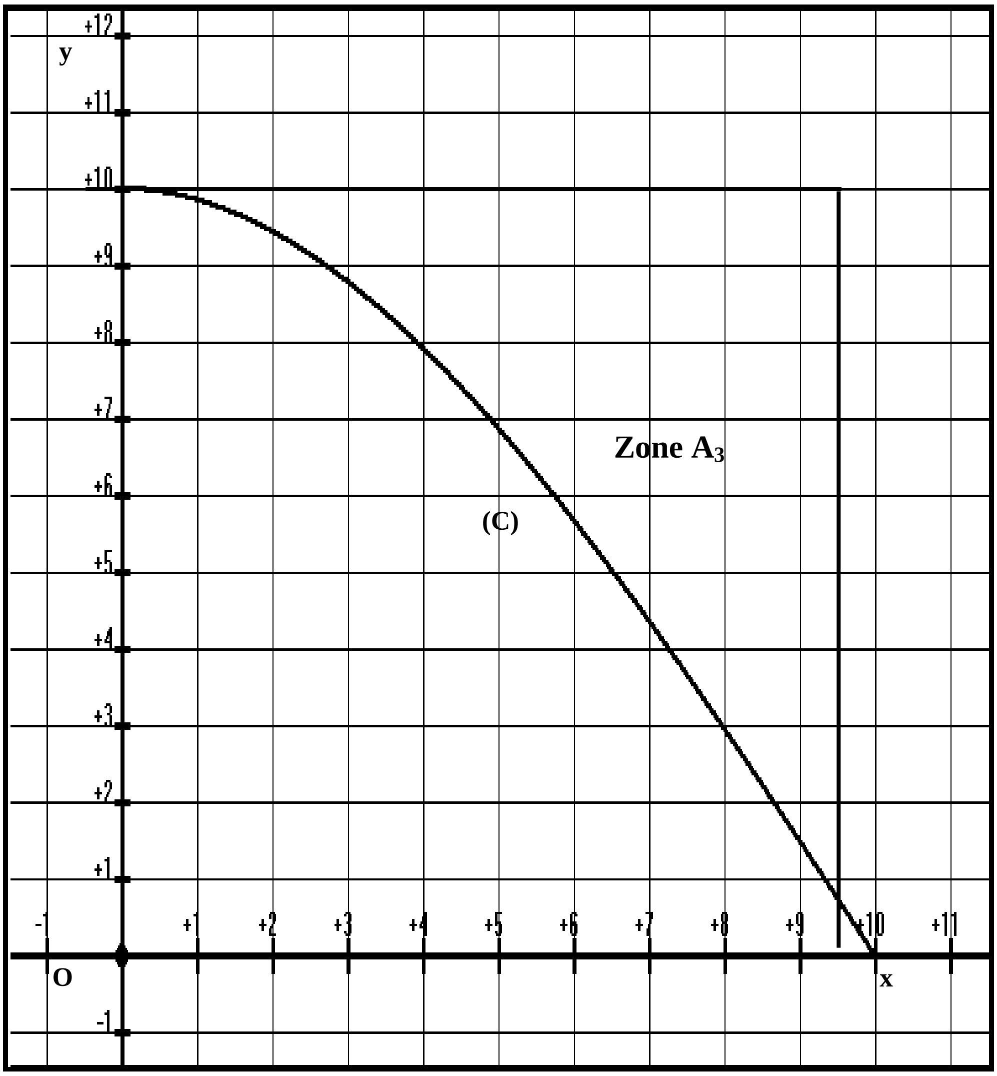
On note $J = \int_0^{10} f(x)\,dx$.

a) Calculer J.

b) En déduire l'aire de A_3 puis l'aire de A_2. Ces résultats seront donnés en cm², arrondis à 10^{-2} près.

<u>N'oubliez pas de rendre l'annexe avec votre copie.</u>

ANNEXE



Corrigé du BAC STAE (2001)

France métropolitaine-Réunion

Exercice n°1 :

1) Soit Ω l'univers rattaché à l'épreuve ; étant donné que le tirage des trois boules est simultané, Ω est l'ensemble des combinaisons de 3 boules prises parmi 13.

$$\text{card } \Omega = C_{13}^{3} \text{ soit card } \Omega = 286$$

Le nombre de tirages possibles est donc égal à 286.

Dans la suite, les événements élémentaires sont considérés comme étant équiprobables.

2) A est réalisé si l'on prend 2 boules blanches parmi 8 et 1 boule rouge parmi 5.

$\text{card } A = C_8^2 \times C_5^1$ soit card A = 140 ;

$\text{prob}(A) = \dfrac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$ soit $\text{prob}(A) = \dfrac{70}{143}$ (soit 0,49 à 10^{-2} près) ;

La probabilité de tirer deux boules blanches exactement parmi les trois boules tirées est de 0,49 à 10^{-2} près.

3) B est réalisé si l'on prend 2 boules blanches et 1 boule rouge ou 2 boules rouges et 1 boule blanche ; ces deux événements étant incompatibles, on obtient :

card B = card A + $C_8^1 \times C_5^2$ soit

card B = 140 + 80 card B = 220 d'où $\text{prob}(B) = \dfrac{\text{card } B}{\text{card } \Omega}$ soit $\text{prob}(B) = \dfrac{10}{13}$

La probabilité de tirer exactement deux boules de la même couleur parmi les trois boules tirées est de 0,77 à 10^{-2} près.

Exercice n°2:

1) Si Monsieur T dépose de façon aléatoire son sac, alors la probabilité qu'il dépose le bon sac, un jour de ramassage donné est $\dfrac{1}{3}$.

2) On s'intéresse au nombre de fois où Monsieur T a déposé le bon sac pendant une période de quatre semaines consécutives.

a) A chaque dépôt de sac, Monsieur T a 2 alternatives : ou il dépose le bon sac ou il ne le fait pas ;
il répète cette action 12 fois de suite ;
les choix se font indépendamment les uns des autres.

Dans ces conditions la loi de X est la loi binomiale de paramètres 12 et $\dfrac{1}{3}$.

b) $\text{prob}(X=0) = C_{12}^{0}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{0}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{12}$ soit prob (X = 0) ≈ 0,0077 .

La probabilité que Monsieur T n'ait jamais déposé le bon sac pendant cette période de quatre semaines consécutives est donc égale à 0,0077 à 10^{-4} près.

c) Prob (X > 0) = 1- Prob (X = 0)
Prob (X > 0) ≈ 1- 0,0077 soit Prob (X > 0) ≈ 0,9923.

La probabilité que Monsieur T ait déposé, au moins une fois le bon sac, pendant cette période est égale à 0,9923 à 10^{-4} près.

Exercice n°3:

1) a) La courbe (Γ) est la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle [0 ;10]

par : $g(x)=(10-x)e^{-\frac{x}{2}}$.

Expression de $g'(x)$: $g'(x)=(-1)e^{-\frac{x}{2}}+(10-x)\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)$

Soit encore $g'(x)=\frac{1}{2}(x-12)e^{-\frac{x}{2}}$

b) Pour tout réel x, on a $\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}>0$; il en résulte que $g'(x)$ a le même signe que l'expression $(x\text{-}12)$.

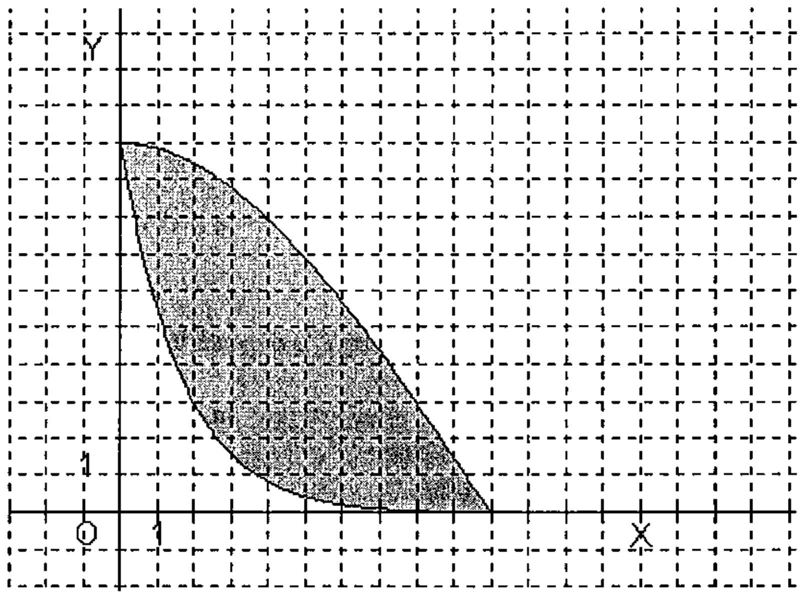
c) Si $x\in[0;10]$ alors $x-12<0$;

$g'(x)$ est donc strictement négatif sur l'intervalle [0 ;10], il en résulte que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle [0 ; 10].

d)

x	0	0,5	1	2	3	4	5	7	10
$g(x)$	10	7,40	5,46	2,94	1,56	0,81	0,41	0,09	0

e)



2) a) Pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 10] ,

$G'(x)=2\,e^{-\frac{x}{2}}+\frac{2}{2}(8-x)e^{-\frac{x}{2}}$ soit $G'(x)=(10-x)\,e^{-\frac{x}{2}}$

donc pour tout x de l'intervalle [0 ; 10] $G'(x)=g(x)$.

G est donc une primitive de la fonction g sur l'intervalle [0 ; 10].

b) Pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 10], l'expression 10-x est positive, on en déduit que sur cet intervalle, $g(x)\geq 0$.

Dans ces conditions, si on note I l'aire de la zone A_1 en unité d'aire,

on a : $I = \int_0^{10} g(x)dx$.

G étant une primitive de *g* sur l'intervalle [0 ; 10], on obtient:

$I = [G(x)]_0^{10}$ soit I=G(10)-G(0).

$G(10) = 4e^{-5}$ et $G(0) = -16$ soit $I = 16 + 4e^{-5}$.

Calcul de la valeur exacte de l'aire de la surface A_1 en unités d'aire.

L'unité d'aire vaut 1 cm^2 donc l'aire de la surface A_1 en cm² est égale à I soit

$16 + 4e^{-5}$ cm².

3 a) La fonction F définie sur l'intervalle [0 ; 10] par $F(x) = \frac{x^4}{800} - \frac{x^3}{20} + 10x$ est une primitive de la fonction f. On en déduit que $J = \left[\frac{x^4}{800} - \frac{x^3}{20} + 10x\right]_0^{10}$ soit $J = \frac{10000}{800} - \frac{1000}{20} + 100$.

On obtient J = 62,5.

b) J est, en unités d'aire, l'aire du domaine compris entre la courbe *(C)*, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. Or l'unité d'aire vaut 1 cm^2 ; on en déduit que l'aire de la surface A_3 est, en cm², 100 – J, soit 37,5 cm².

De même l'aire en cm² de la surface A_2 est J – I ;

c'est-à-dire 62,5 – (16 + 4e^{-5}) cm^2 ;

soit (46,5 - 4e^{-5}) cm^2 ;

soit à 10^{-2} près 46,47 cm^2.