

Introduction

Dans le mensuel INRA *Productions Animales*, octobre 2000, un article¹ traite des numérations cellulaires dans le lait de différentes races bovines laitières françaises.

Malgré la difficulté de compréhension de quelques termes, cet article est intéressant par les notions de mathématiques utilisées qui font partie des différents programmes de nos classes : moyennes, population normale, fonction logarithme.

Les différentes parties qui suivent reprennent des notions mathématiques rencontrées dans l'article. Même si certaines activités peuvent être reprises en classe de BEPA, d'autres en classes de terminales bac pro, techno ou en BTSA, l'article est essentiellement destiné aux enseignants. A vous de vous informer, d'y réfléchir, de proposer vos suggestions !

A / Partie préliminaire : moyennes arithmétique et géométrique.

(Dans cette partie b et c sont deux nombres réels strictement positifs.)

a) Formule de la moyenne arithmétique m_a : $m_a = \frac{\sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=p} n_i}$.

b) La moyenne géométrique de deux nombres strictement positifs b et c est le nombre m_g défini par $m_g = \sqrt{bc}$.

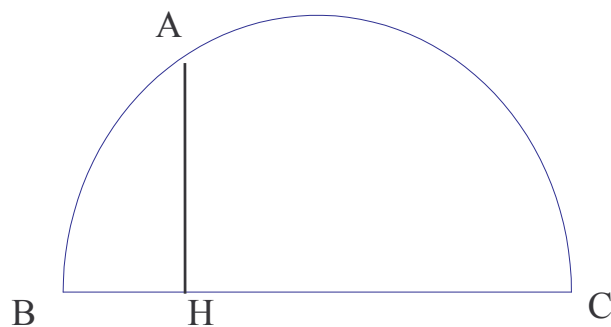
Exemple : Calculer la moyenne géométrique des nombres 5 et 16.

c) Construction

Construction d'un segment $[AH]$ dont la longueur AH est la moyenne géométrique de b et c . Soient H , B et C trois points alignés tels que : H appartienne au segment $[BC]$, $HB = b$ et $HC = c$.

Soit A le point d'un demi-cercle de diamètre $[BC]$ distinct de B et C tel que les droites (AH) et (BC) soient perpendiculaires.

Justifier, en utilisant une relation métrique dans le triangle rectangle, que AH est la moyenne géométrique des nombres b et c , c'est-à-dire que $AH = \sqrt{bc}$.



Exemple : L'unité de longueur est le centimètre, construire un segment de longueur $\sqrt{12}$.

d) En utilisant des arguments géométriques, justifier que la moyenne arithmétique des nombres b et c est supérieure à la moyenne géométrique. Dans quel cas a-t-on l'égalité?

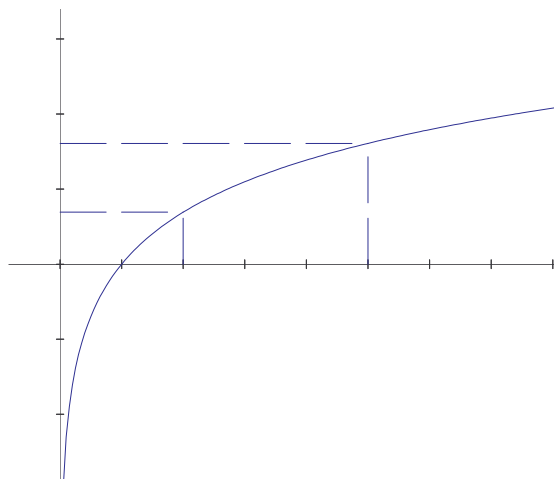
¹Bilan des numérations cellulaires dans le lait des différentes races bovines laitière françaises.
Auteurs : R RUPP, D BOICHARD, C BERTRAND et S BAZIN.

Calcul de la moyenne géométrique en utilisant les logarithmes.

e₁) Montrer que : $\frac{\ln(b) + \ln(c)}{2} = \ln(\sqrt{bc})$.

e₂) Traduire cette propriété en utilisant les termes de moyenne arithmétique et moyenne géométrique.

e₃) Illustrer sur la courbe représentative de la fonction logarithme népérien avec les nombres 2 et 5 la phrase suivante : « la moyenne arithmétique des logarithmes des deux nombres 2 et 5 n'est pas égale au logarithme de la moyenne arithmétique de ces deux nombres ».



f) Calcul de la moyenne géométrique de plusieurs nombres strictement positifs.

Exemple : Calcul de la moyenne géométrique m_g des nombres 5, 16, 27, 32 et 45.

f₁) Déterminer la moyenne arithmétique m_a des logarithmes de ces nombres.

f₂) La moyenne m_g est le nombre tel que $\ln(m_g) = m_a$. Calculer m_g .

g) Calcul de la moyenne géométrique de plusieurs nombres strictement positifs affectés de coefficients strictement positifs.

Exemple : Calcul de la moyenne géométrique m_g des nombres 5, 16, 27, 32 et 45 affectés respectivement des coefficients 2, 1, 3, 2 et 1.

g₁) Déterminer la moyenne arithmétique m_a des logarithmes de ces nombres affectés des coefficients donnés.

g₂) La moyenne m_g est le nombre tel que $\ln(m_g) = m_a$. Justifier que $m_g = 19,25$ à 0,01 près.

h) Déterminer les moyennes arithmétiques et géométriques des trois séries suivantes :

					moyenne arithmétique	moyenne arithmétique des logarithmes	moyenne géométrique
100	450	430	421	9000			
100	450	430	421	90 000			
1	480	500	480	90 000			

h₁) Quelle est, parmi les deux moyennes arithmétique ou géométrique, celle qui est plus sensible aux valeurs élevées ?

h₂) Quelle est celle qui est sensible aux petites valeurs ?

B/ Etude de cas

1) Le Comptage des Cellules Somatiques (CCS)

La concentration des cellules somatiques dans le lait est mesurée régulièrement dans le cadre du contrôle laitier; cette mesure est donnée par le caractère CCS (Comptage de Cellules Somatiques). La numération cellulaire du lait est un témoin de l'état inflammatoire de la mamelle et donc indirectement de la présence d'une infection. La numération cellulaire est représentée par un nombre de cellules par mL.

Elle est utilisée depuis longtemps chez les bovins laitiers pour le dépistage et la maîtrise des mammites dans les élevages.

Par ailleurs elle a une répercussion directe sur le prix du lait payé aux éleveurs dans le système de paiement du lait à la qualité.

La numération cellulaire apparaît comme le critère de sélection de choix pour améliorer la résistance aux mammites chez les bovins laitiers.

Voici les données concernant le contrôle laitier de 48 vaches d'un troupeau de 60 vaches d'une exploitation de races Prim'Holstein.

Pour ce contrôle, on prélève pour faire l'analyse, la production du soir, puis du matin.

Les résultats du CCS sont donnés en milliers de cellules par millilitre.

CCS	Lait (kg)	CCS	Lait (kg)	CCS	Lait (kg)	CCS	Lait (kg)
88	9,4	59	36	30	31	2306	24
320	8,4	427	26,2	397	17,8	190	17,8
102	23,8	161	44	2338	30,8	88	34,6
449	11	1136	36,4	95	29	53	16
98	21,2	224	20	59	41,4	60	21
47	16	9999	8,4	55	24,4	1211	18
291	29	256	17	126	21	100	35
643	26,4	314	23	590	19,8	35	30
5580	16,6	1904	24	179	20	52	19
205	15	2205	37	94	21,4	52	16,4
1688	30	148	13	48	22,4	35	15,2
160	20,2	429	13	70	27	2322	18,2

a) Déterminer le pourcentage de vaches à moins de 300 000 cellules/mL (c/mL).

b) Dans les résultats du contrôle laitier on peut lire le tableau suivant :

Le troupeau	Troupeau	Primipares	Multipares
Nombre de vaches présentes	60	18	42
Nombres de vaches traitées	48	15	33
Etat sanitaire des mamelles			
comptages à moins de 300 000 c/mL	63 %	80 %	55 %
comptages à plus de 800 000 c/mL		13 %	

b₁) Que représente le pourcentage de 80 % indiqué dans ce tableau ?

b₂) Compléter la dernière ligne de ce tableau.

c) Calculer la moyenne arithmétique des CCS de l'échantillon examiné.

- d) Construire un histogramme pour l'échantillon examiné avec des classes d'amplitude de 200 (Annexe 1).
- e) Commenter les extraits suivants de l'article « ... les CCS présentent une distribution très dissymétrique ... » (p 258) et « ...la grande variabilité des CCS des Prim'Hostein ... » (p. 259).
- f) Le prix de référence du litre de lait est de 2,1430 F.
 Pour le mois d'octobre 2000, suite aux résultats trop élevés du contrôle laitier, le prix de référence du litre de lait a été diminué de 0,10 F.
- f₁) Donner ces résultats en euros.
- f₂) Déterminer cette baisse en pourcentage.
- f₃) Déterminer cette perte sachant que le litrage du mois d'octobre est de 32 289 litres. Sachant que le prix de revient du litre de lait est de 1,45 F, évaluer cette perte en pourcentage du bénéfice .

Race Prim'Hostein



2) Le Score de Cellules Somatiques (SCS)

Les différents graphiques obtenus à partir de la série statistique donnée précédemment montrent une forte dissymétrie des CCS, avec une majorité de valeurs inférieures à 100 000 cellules/mL et une minorité de valeurs élevées, voire très élevées. *De façon à obtenir des propriétés plus propices à une modélisation (normalité de la distribution des données), le caractère utilisé pour l'évaluation génétique est le score des cellules somatiques (SCS).*

Le score des cellules somatiques SCS est défini par la transformation logarithmique suivante :

$$SCS = \frac{\ln\left(\frac{CCS}{100\,000}\right)}{\ln(2)} + 3.$$

En pratique, le SCS varie de façon continue entre 0 et 8 environ.

- a) Déterminer les valeurs de SCS pour les valeurs suivantes de CCS : 59 000, 320 000 et 1 900 000 à 10^{-2} près.
- b) La valeur moyenne de SCS pour la race Flamande est 2,65. Quelle est la valeur correspondante de CCS ?

- c) Donner un exemple de valeur de CCS pour laquelle le SCS est négatif.
 d) A partir de quelle valeur de CCS, le score SCS est-il positif ?

Justifier que, lorsque le **CCS** est multipliée par 2, le SCS est augmenté de 1.

- e) Les résultats des scores SCS pour le troupeau de 48 vaches sont les suivants :

SCS	SCS	SCS	SCS
2,82	2,24	1,26	7,53
4,68	5,09	4,99	3,93
3,03	3,69	7,55	2,82
5,17	6,51	2,93	2,08
2,97	4,16	2,24	2,26
1,91	9,64	2,14	6,60
4,54	4,36	3,33	3,00
5,68	4,65	5,56	1,49
8,80	7,25	3,84	2,06
4,04	7,46	2,91	2,06
7,08	3,57	1,94	1,49
3,68	5,10	2,49	7,54

Construire un histogramme pour l'échantillon examiné avec des classes d'amplitudes 1,5 (Annexe 2).

3) Moyennes des CCS et des SCS

On considère l'exemple suivant concernant 4 vaches du troupeau précédent.

CCS	59 000	320 000	70 000	35 000
Lait en Kg	41	9	20	15
SCS				

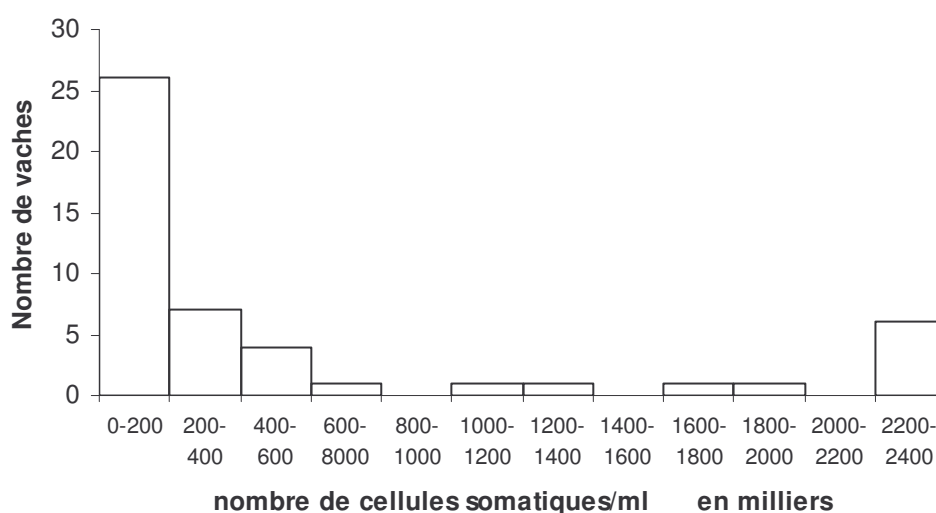
- a) En tenant compte de la quantité de lait produite,
 a₁) Déterminer la moyenne arithmétique pondérée du nombre de cellules CCS .
 Remarques : les coefficients de la pondération sont les quantités de lait, et on fera les calculs en admettant que 1 Litre de lait fait 1 kg de lait .
 a₂) Compléter le tableau ci-dessus.
 a₃) Déterminer la moyenne arithmétique pondérée des scores SCS.
- b) Déterminer la moyenne géométrique des CCS en utilisant la formule $\ln(m_g) = m_a$ présentée à la partie préliminaire.

En guise de conclusion :

On retiendra que la transformation proposée :

- 1) est une façon d'obtenir des propriétés plus propices à une modélisation en normalisant la distribution des données.
Voir l'histogramme de l'annexe 2 ainsi que les résultats présentés dans l'article paru dans le mensuel "INRA *Productions Animales*, octobre 2000" à la page 261.
- 2) permet de ne pas donner une importance excessive aux grandes valeurs lors du calcul des moyennes.
La moyenne arithmétique des CCS, n'est pas le meilleur outil pour refléter l'état sanitaire d'un troupeau.

Annexe 1



Annexe 2

