Une idée de DM en BTSA : le logarithme de base 2

Nous avons brièvement entrevu en cours la définition de la fonction logarithme en base a où a désigne un réel strictement positif différent de 1.

Les fonctions logarithmes les plus usitées ont pour bases e et 10 ; elles sont appelées respectivement *logarithme népérien* et *logarithme décimal*. Nous vous proposons ici d'étudier une troisième fonction logarithme qui trouve une utilisation dans divers domaines : la *fonction logarithme de base 2*.

PARTIE A : Étude de la fonction.

On définit sur $]0\,;+\infty[$ la fonction logarithme en base 2, notée $\log_2$, par :

$$\boxed{\log_2(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(2)}}$$

1. **Déterminer** la fonction dérivée de la fonction $\log_2$.
2. Étudier les variations de la fonction $\log_2$ sur $]0\,;+\infty[$, puis dresser son tableau de variation sur ce même intervalle.
3. Représenter graphiquement la fonction $\log_2$ dans un plan muni d'un repère orthogonal adapté.
4. Justifier à l'aide du graphique précédent que l'équation $\log_2(x)=k$ admet une unique solution pour tout réel k. Cette unique solution est notée 2^k.
   On a donc $\log_2(2^x)=k \iff x=2^k$.
   On en déduit que :
   - Pour tout réel x strictement positif, $2^{\log_2(x)}=x$.
   - Pour tout réel x, $\log_2(2^x)=x$.
5. Montrer que, pour tous réels a et b strictement positifs, $\log_2(ab)=\log_2(a)+\log_2(b)$.
   On pourrait démontrer de la même façon que la fonction $\log_2$ possède toutes les autres propriétés algébriques de la fonction ln, à savoir pour a et b réels strictement positifs :
   $\log_2\left(\frac{a}{b}\right)=\log_2(a)-\log_2(b)$ et pour n entier, $\log_2(a^n)=n\log_2(a)$.

PARTIE B : Applications

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{N}$:
   a) $2^x=1\,024$
   b) $2^x=1\,023$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   a) $\log_2(x)+\log_2(x+1)<3$
   b) $2^{2x}-2^x-1=0$

PARTIE C : Deux situations d'utilisation

Exercice 1

Une population de bactéries double toutes les 4 heures. Le 1er janvier à midi, on a compté 2 millions de bactéries dans cette population.
Combien de périodes de quatre heures faudra-t-il que le nombre de bactéries dépasse le milliard d'unités ?
(La modélisation par une suite numérique sera faite rigoureusement et il conviendra d'utiliser $\log_2$.)

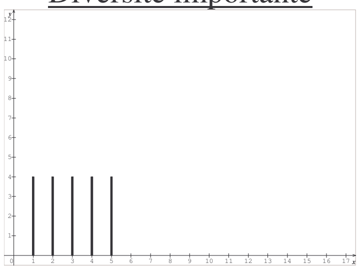
Exercice 2

En écologie, quand un échantillon comporte plusieurs catégories, on définit la *richesse* comme étant le nombre de catégories présentes dans cet échantillon.

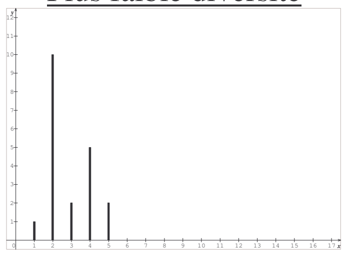
La *diversité* dépend évidemment de la richesse, mais pas seulement. Elle prend en compte la représentativité de chacune des catégories : plus la répartition est équitable, plus grande est la diversité.

Par exemple, à même effectif et même richesse, on peut obtenir les distributions suivantes :

Diversité importante



Plus faible diversité



Pour mesurer la diversité, on peut utiliser H, l'*indice de Shannon*, donné par la formule suivante :

$$\boxed{H = -\sum_{k=1}^{n} p_k \log_2(p_k)}$$

où n désigne le nombre de catégories et p_k, la fréquence de la k-ième catégorie.

H est d'autant plus élevé que la diversité est importante. H est une entropie.

1. Quel est le signe de H ? Justifier.

2. Application : Comparaison de la diversité fongique de deux parcelles de sapins, ***Abies pectinata*** et ***Abies alba*** de même superficie et de même composition géologique. L'étude sera restreinte aux champignons dits *supérieurs*. Le tableau suivant donne le nombre d'espèces recensées.

Espèces (Catégories)	Parcelles	
	Abies pectinata	*Abies alba*
Agaricus semotus	8	5
Agaricus silvicola	0	10
Calvatia excipulliformis	10	12
Clitocybe cerussata	20	5
Clitocybe fragrans	0	6
Clitocybe nebularis	18	15
Galerina autumnalis	5	0
Geastrum sessile	12	0
Hygrophorus agathosmus	32	15
Lactarius deterrimus	0	14
Lycoperdon echinatum	8	0
Lycoperdon perlatum	5	15
Pseudoclitocybe cyathiformis	4	0
Ramaria abietina	33	20
Russula queletii	15	15
Rhodocybe gemina	44	5
Strobilurus esculentus	0	15

a) Représenter les deux répartitions des espèces par un diagramme en bâtons.

b) Calculer la richesse pour chacune des parcelles.

c) A l'aide d'un tableur, calculer l'indice de Shannon pour chacune des parcelles.

d) Comparer alors les diversités des deux parcelles.

L'utilisation de l'indice de Shannon présente un inconvénient : les valeurs prises par H dépendent à la fois de la richesse et de la répartition des effectifs entre les différentes espèces. Notons au passage que H varie de 0 (une seule espèce) à $\log_2(n)$ (toutes les espèces ont la même abondance). Des peuplements à physionomies très différentes peuvent avoir aussi même diversité. Aussi convient-il de calculer de façon complémentaire un indice qui rapporte la diversité observée à la diversité théorique maximale : c'est l'indice d'*équitabilité* (ou encore de *régularité*, défini par :

$$\boxed{E = \frac{H}{\log_2(n)}}$$

L'équitabilité est comprise entre 0 et 1 : elle est proche de 0 quand la quasi-totalité des effectifs est concentrée sur une seule espèce ; elle est proche de 1 lorsque toutes les espèces ont la même abondance. Un indice d'équitabilité inférieur à 60% caractérise un environnement perturbé.

e) Calculer l'indice d'équitabilité pour chaque parcelle et comparer.

f) Peut-on considérer qu'au moins l'une des parcelles est perturbée. Justifier.

Références : *Biostatistique* de Bruno Scherrer

Écologie et SIG : un outil de gestion patrimoniale appliqué aux espaces naturels touristiques de J.-C. Loubier, Université de Grenoble