Épreuve pratique de mathématiques au baccalauréat S

Nous sommes quatre membres du groupe Py-Math à participer en mai 2008 à la deuxième phase de l'expérimentation de l'épreuve pratique de mathématiques au baccalauréat S.

Dans le bulletin précédent, nous avions répondu à certaines questions pratiques que nous nous posions sur cette épreuve et nous étions promis de retravailler ensemble sur ce sujet.

Quelques bribes de notre conversation six mois plus tard :

- Tu les emmènes souvent en salle info ?
- J’essaye ! D’autant que j’ai réussi à avoir une demi-heure de plus en Terminale S.
- Et tu leur fais faire quoi ?
- Certains sujets de la banque de 2007 et aussi des exercices trouvés dans des manuels de Terminale S et adaptés à l’informatique.
- Ah oui, moi aussi ! Je leur en ai même donné certains sans indication technique et je les trouve plutôt dégourdis avec l’outil informatique.
- Ils en ont sûrement fait pas mal en Première !?
- Oui ! Je leur donne aussi des devoirs *maison* type épreuves pratiques. Ils aiment bien. En ce qui me concerne, je dois faire avec l’horaire prévu. En revanche les élèves ont cours une heure par semaine en salle informatique (aussi bien en Première qu’en Terminale). On allume ou non les ordinateurs, tout dépend des besoins lors de la séance.
- Et tu les notes ces DM ? Comment tu évalues la partie info ?
- … !???
- Quoi ? Qu’est-ce que j’ai dit ?
- Tu n’as pas une autre question à poser ?
- Non ! Et je persiste ! Comment on évalue cette épreuve ? C’est **LA** question que je me pose. Parce ce que pour ce qui est de l’utilisation des logiciels, on gère assez facilement mais l’évaluation, j’avoue que j’appréhende un peu… pas toi ?

L’évaluation des élèves nous semble la partie la plus délicate de cette épreuve. Tout à fait nouvelle, elle va nous amener à modifier nos critères.

Pour répondre à **LA** question que se pose notre collègue, nous avons, d’une part, commenté (voire interprété) certaines grandes lignes du protocole d’expérimentation.

D’autre part, une collègue qui a participé à un stage sur le sujet nous fait partager son expérience à travers le sujet n° 31 de 2007 : *Tangentes à une parabole*. Rédigé pour une résolution (plutôt) avec GEOPLAN, nous en proposons un énoncé plus *ouvert* (tout est relatif !) et commentons les différences entre la résolution avec GEOPLAN et celle avec GEOGEBRA.

Enfin, pour clore cet article (et pour vous donner envie de l’essayer aussi, si ce n’est pas déjà fait…), nous présentons le logiciel GEOGEBRA (libre et gratuit, téléchargeable sur www.geogebra.org) à travers une activité d’introduction au calcul intégral.

Quelques points importants du protocole

Objectifs et organisation de l'épreuve

Extrait du protocole :	Commentaires
« Il s'agit d'apprécier leur capacité à mobiliser les TICE pour résoudre un problème mathématique. Les sujets proposés aux candidats sont des exercices de mathématiques où l'utilisation des TICE (…) intervient de manière significative dans la résolution du problème posé. »	L'examinateur valorise la démarche, l'analyse du sujet, les prises d'initiatives, le recul de l'élève par rapport aux outils informatiques et son autonomie. Les activités permettent d'évaluer diverses compétences (1).

Sélection des sujets

Extrait du protocole :	Commentaires
« Les professeurs (…) choisissent parmi les 25 sujets retenus, ceux qui seront proposés aux élèves de l'établissement ; ce choix est guidé par les équipements disponibles et les enseignements assurés par les professeurs. (…) Un même sujet peut être commun à plusieurs candidats passant au même moment dans la même salle. »	L'enseignant de la classe participe au choix des sujets mais ne peut être examinateur. Le nombre de sujets dépend du nombre de passages. Les examinateurs choisissent les sujets en fonction de leurs compétences.

Déroulement de l'épreuve et notation du candidat

Extrait du protocole :	Commentaires
« Les professeurs convoqués s'approprient les sujets (…) Un examinateur évalue au maximum 4 élèves. » *« Les professeurs examinateurs élaborent, à partir de la grille évaluation, une grille d'observation. »*	- L'examinateur pourra remplir un tableau à deux colonnes : compétences évaluées, remarques. - À partir de ce tableau, une note est attribuée à l'élève dans les proportions suivantes : trois quarts de la note pour la partie expérimentale (démarche, traduction du sujet) et un quart pour la démonstration. - Les examinateurs harmonisent les notes en fonction des sujets car ils n'ont pas tous le même niveau de difficulté. - Cette note est ramenée à 4 points. L'élève pourra obtenir 0, 1, 2, 3 ou 4 points.

(1) *À titre d'exemples, on peut citer les démarches suivantes dont l'examinateur devra tenir compte et qu'il devra arriver à évaluer :*
Pour réaliser une construction géométrique, l'élève qui n'arrive pas à démarrer peut penser à débloquer la situation en effectuant l'aller retour du papier crayon vers l'ordinateur. Il peut prendre des initiatives par exploration d'une figure dynamique, émettre des conjectures et avoir l'esprit critique en s'aidant de l'affichage d'angles, longueurs, etc.

L’évaluation

Lors de l’évaluation de cette épreuve pratique du Baccalauréat S, il sera nécessaire d’établir, avant l’épreuve et pour chaque sujet choisi, une grille d’observation (qui servira pendant l’épreuve), ainsi qu’une fiche d’évaluation.

L’harmonisation entre correcteurs sera évidemment indispensable. La notation devra en particulier prendre en compte :

- les difficultés inégales selon les sujets notamment pour la partie expérimentale (qui compte pour ¾ de la note) ;
- les aides apportées aux candidats.

Pour une question d’organisation, on peut procéder à un tirage au sort des sujets avant la date de l’épreuve. Pour préserver le secret, cela supposera alors un codage des sujets.

Exemple de codage :

Heure - n° sujet - n° examinateur - n° code du prof - … etc.

Comment évaluer les compétences TICE pendant l’épreuve ?

Il va falloir apprendre à noter différemment. En effet, l’examinateur doit évaluer le candidat en activité, il doit apprécier sa démarche, ses qualités pour expérimenter, sa persévérance, son goût à chercher et à prendre des initiatives.

Soulignons que pendant l’épreuve :

- l’élève devra bien souvent effectuer plusieurs essais permettant de formuler une conjecture ;
- l’examinateur accompagne le candidat. Il interviendra dans certains cas pour débloquer une situation sachant qu’une heure passe vite et qu’une production écrite est systématiquement demandée. Dans d’autres cas, l’intervention sera un échange qui permettra à l’enseignant d’évaluer l’esprit critique du candidat et sa capacité à expérimenter.

Il est donc nécessaire de faire une distinction entre « aide pénalisante » et « aide non pénalisante ». Par exemple, ne pas savoir mobiliser ses connaissances mathématiques pour tracer une figure est pénalisant alors qu’être bloqué par la syntaxe d’une expression peut être considéré comme non pénalisant.
Sachant qu’un examinateur s’occupe de quatre candidats à la fois, la grille d’observation peut avoir la forme ci-dessous, si pour ce sujet il est prévu deux appels :

Appels	compétences	Poste n° 1	Poste n° 2	Poste n° 3	Poste n° 4
Appel n° 1	…….				
Appel n° 2	…….				

Pendant l’épreuve l’examinateur n’a plus qu’à compléter la fiche par des croix dans les colonnes « Poste ». À titre d’exemple, pour le sujet *Tangentes à une parabole*, nous fournirons une grille d'évaluation possible.

Sujet *Tangentes à une parabole*

Énonce

On considère la parabole *C* d'équation $y = \frac{1}{2}x^2$.

Étant donné un réel *t* on nul, on se propose de mettre en évidence, puis de démontrer une propriété du point d'intersection des tangentes à la parabole C aux points *M* et *M'* d'abscisses respectives t et $-\frac{1}{t}$.

Partie pratique

1. À l'aide d'un logiciel adapté, tracer la parabole *C*.
2. On note *t* un réel donné,
   - **a.** Placer le point *M* d'abscisse *t* sur la courbe *C*.
   - **b.** Tracer la tangente *T* à *C* au point *M*. Si le logiciel le nécessite, calculer d'abord le coefficient directeur de la tangente.

Appeler l'examinateur pour qu'il vérifie la construction de *C*, *M* et *T*.

3. **a.** Placer le point *M'* d'abscisse $-\frac{1}{t}$ sur la courbe *C*.
   - **b.** Tracer la droite *T'* tangente à *C* en *M'*.
   - **c.** Placer le point *P* intersection de *T* et *T'*.
4. Lorsque le réel *t* varie dans $\mathbb{R}^*$, à quel ensemble le point *P* semble-t-il appartenir ?

Appeler l'examinateur pour qu'il vérifie la construction de *M'*, *P*, *T'* et de la trace de *P*.

Partie à rendre sur une copie

1. Donner les équations des droites *T* et *T'*.
2. Calculer les coordonnées du point *P* et conclure sur la propriété conjecturée.

16e RMT - Ballon de football (CAT. 6, 7, 8)

Un ballon de football est formé de 12 pentagones réguliers et de 20 hexagones réguliers maintenus entre eux par des coutures. Leurs côtés mesurent tous 4,5 cm.

Quelle est la longueur totale des coutures ?

Explique comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

Grille d'observation

Sujet *Tangentes à une parabole*

Appels	Compétences		Poste n° 1	Poste n° 2	Poste n° 3	Poste n° 4
N° 1	Création de C, M et T	**Avec aide**				
		Sans aide				
N° 2	Création de M', T'	**Avec aide**				
		Sans aide				
	Création de P et de sa trace	**Avec aide**				
		Sans aide				
	Bonne conjecture sur l'ensemble des points P	**Avec aide**				
		Sans aide				

Fiche d'évaluation

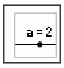
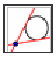
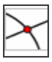
Sujet *Tangentes à une parabole*

Compétences évaluées pour la partie expérimentale (15 points)	**Éléments permettant de situer l'élève**
L'élève est capable de construire la figure demandée en utilisant un logiciel adapté. *L'élève tire profit des indications données éventuellement à l'oral.*	
L'élève est capable d'émettre une conjecture en dynamisant la figure. *(déplacement du point P, utilisation de la commande* ***Trace****…)* *L'élève tire profit des indications données éventuellement à l'oral.*	
L'élève montre un certain nombre de connaissances et de savoir faire mathématiques sur le sujet : *(calculs de la dérivée et du coefficient directeur d'une tangente…)*	
Compétences évaluées pour la production écrite (5 points)	**Éléments permettant de situer l'élève**
L'élève propose une résolution correcte de l'exercice. *Il est capable d'émettre un retour critique sur sa conjecture.*	

Remarques complémentaires :

Á l'usage de l'enseignant qui doit s'approprier le sujet :

Récapitulatif des commandes à utiliser et de la démarche à adopter pour réaliser la figure du sujet *Tangente à une parabole* avec les logiciels GEOGEBRA et GEOPLAN :

GEOGEBRA	GEOPLAN
- Saisir l'expression : $f(x) = 1/2\ x$^2. - Créer le curseur t avec le bouton  - Saisir $M = (t\ ,f(t))$ - Tracer la tangente T à la courbe en M avec le bouton :  - Saisir $M' {=} (-1/t\ ,f(-1/t))$. - Tracer la tangente T' à la courbe en M'. - Créer le point P avec le bouton  - Afficher trace de P (clic droit sur P, choisir *Trace activée*)	- Créer : numérique/variable libre t dans un intervalle. - Créer : numérique/fonction numérique à une variable $f(x) = 1/2\ x$^2. - Créer : ligne courbe graphe d'une fonction définie. - Créer : point M de coordonnées $(t\ ,f(t))$ **Calculer (sur copie) la fonction dérivée de *f* et les coefficients directeurs de *T* et de *T'*.** - Créer : droite de coefficient directeur t et passant par M. - Créer : point M' de coordonnées $(-\ 1/t\ ,\ \mathrm{f}(-\ 1/t))$. - Créer : droite de coefficient directeur $-\ 1/t$ et passant par M'. - Créer : point d'intersection P de deux droites. - Créer : afficher/mode trace de P.

Remarque :

Avec GEOGEBRA, l'élève peut tracer et conjecturer sans avoir les connaissances de base en mathématiques ; avec GEOPLAN, l'élève ne peut pas tracer les tangentes sans savoir calculer leurs coefficients directeurs.

Présentation de GEOGEBRA par une activité d'approche : encadrement d'une aire

Dans un repère orthonormal, C est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=x^2$. On note $\mathcal{D}$ le domaine situé entre la courbe, l'axe des abscisse et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.
L'objectif de cette activité est de calculer l'aire $\mathcal{A}$ de ce domaine $\mathcal{D}$.

Partie pratique

1. Avec le logiciel GEOGEBRA[1], tracer C ainsi que la droite d'équation $x=1$.

- Saisir : *f(x)=Si[x>=0 , x^2]* ; puis saisir : *x=1*
- Modifier la feuille de travail avec la commande *Feuille de travail* du menu *Option*. Choisir dans l'onglet *Axes*, la distance entre les graduations des axes et la fenêtre de travail :

  Distance : 0.333 ; *min* : – 0.5 ; *max* : 1.5 pour les axes des abscisses et des ordonnées.

2. Visualiser le domaine $\mathcal{D}$ dont on veut déterminer l'aire :

- Saisir : *Intégrale[f , 0 , 1]* (on peut utiliser le menu *Commande*).

3. On cherche maintenant à encadrer $\mathcal{D}$ par deux domaines dont on sait calculer les aires.

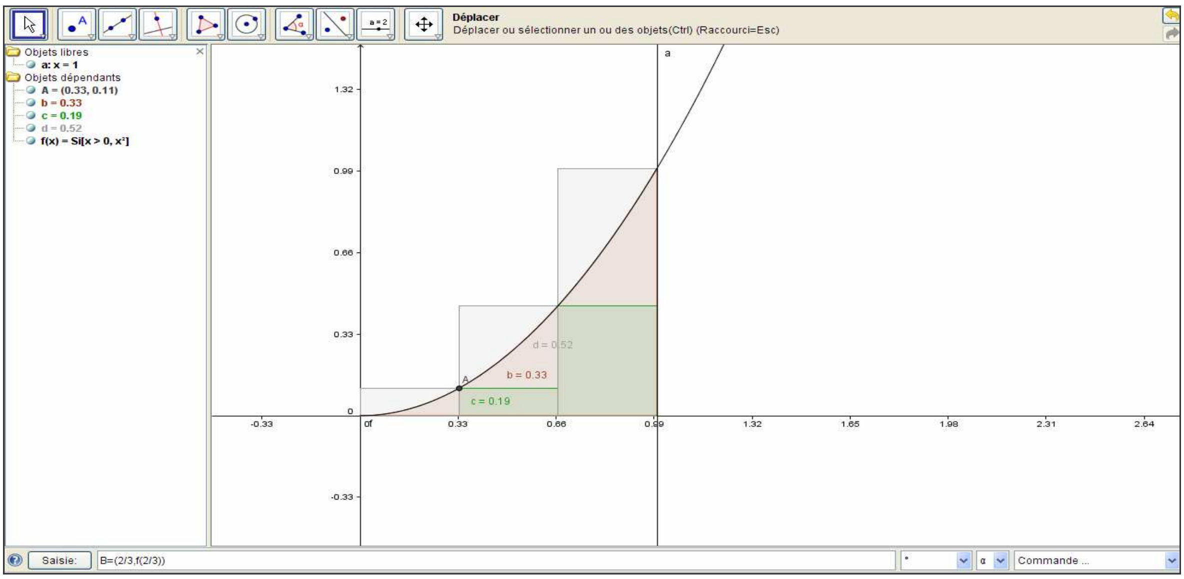
- On construit trois rectangles R_k de largeur $\frac{1}{3}$ et de hauteur $f\left(\frac{k}{3}\right)$ pour $k\in\{0,1,2\}$.

  - Saisir : *c = SommeInférieure[f , 0 , 1 , 3]* (on peut utiliser le menu *Commande*).

- On construit ensuite trois rectangles R'_k de largeur $\frac{1}{3}$ et de hauteur $f\left(\frac{k+1}{3}\right)$ pour $k\in\{0,1,2\}$.

  - Saisir : *d = SommeSupérieure[f , 0 , 1 , 3]* (on peut utiliser le menu *Commande*).

- Placer les points $A\left(\frac{1}{3},f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$; $B\left(\frac{2}{3},f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$; $C\,(1\,,\mathrm{f}(1))$.

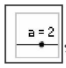


[1] Le fichier ***aire*** à réaliser est téléchargeable sur le site r2math.

4. Justifier que $\frac{5}{27} \leq \mathcal{A} \leq \frac{14}{27}$.

5. Afin d'encadrer $\mathcal{A}$ plus précisément, on partage l'intervalle $[0\,,1]$ en n intervalles de même amplitude $\frac{1}{n}$. Sur chaque intervalle du type $\left[\frac{k}{n}\,;\frac{k+1}{n}\right]$ (avec $0 \leq k \leq \mathrm{n}-1$), on construit le rectangle R_k de hauteur $f\left(\frac{k}{n}\right)$ et le rectangle R'_k de hauteur $f\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

   On réalise le graphique de la façon suivante :

   a. Créer le curseur n en cliquant sur le bouton , préciser la plage de variation de n *min=0* ; *max =100* et indiquer le pas du curseur *incrément=1*.

   b. Faire ensuite un clic droit sur c, choisir : la commande *Redéfinir*, remplacer 3 par n dans la formule. Procéder de même pour d. Faire ensuite varier la valeur de n à l'aide du curseur.

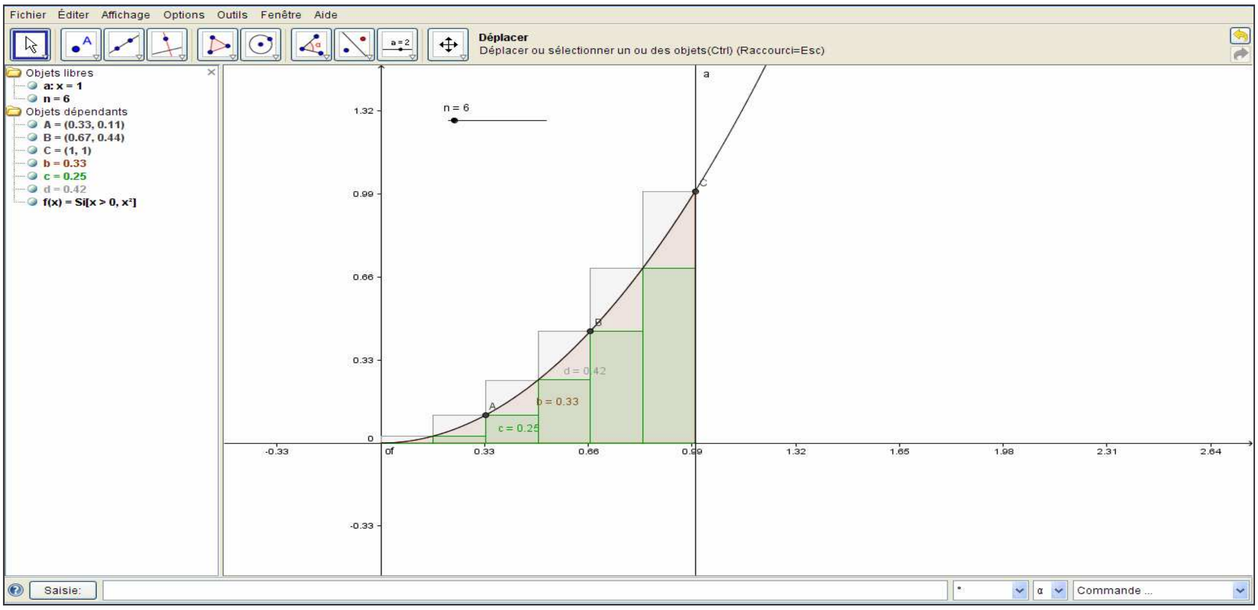
6. On note u_n *la* somme des aires des rectangles R_k.

   Que représente u_n par rapport à la valeur de l'aire $\mathcal{A}$ recherchée ?

7. On note v_n la somme des aires des rectangles R'_k .

   Que représente v_n par rapport à la valeur de l'aire $\mathcal{A}$ recherchée ?

8. Conjecturer la valeur des limites de u_n et de v_n (expliquer la démarche pratique qui permet d'établir la conjecture). Quelle inégalité peut-on écrire ?



Remarque :

- Pour déplacer le curseur (ou tout autre objet), cliquer au préalable sur le bouton *Déplacer* .
- Pour changer la couleur d'un objet, faire un clic droit sur l'objet et choisir la commande *Propriétés*.

<u>Partie écrite</u>

9. Justifier que f est continue, positive et strictement monotone sur $[0\,,1]$.

10. Démontrer par récurrence que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2}$.

11. En déduire que $u_n=\dfrac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$ et que $v_n=\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$.

12. Déterminer la limite des suites (u_n) et (v_n).

13. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

L'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$ est la limite commune de (u_n) et (v_n). On note $\mathcal{A}=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

14. Donner la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

Pour aller plus loin…

1. Toujours avec GeoGebra[2] : construction de la courbe représentative de la primitive *F* de *f* qui s'annule pour *a* = 0.

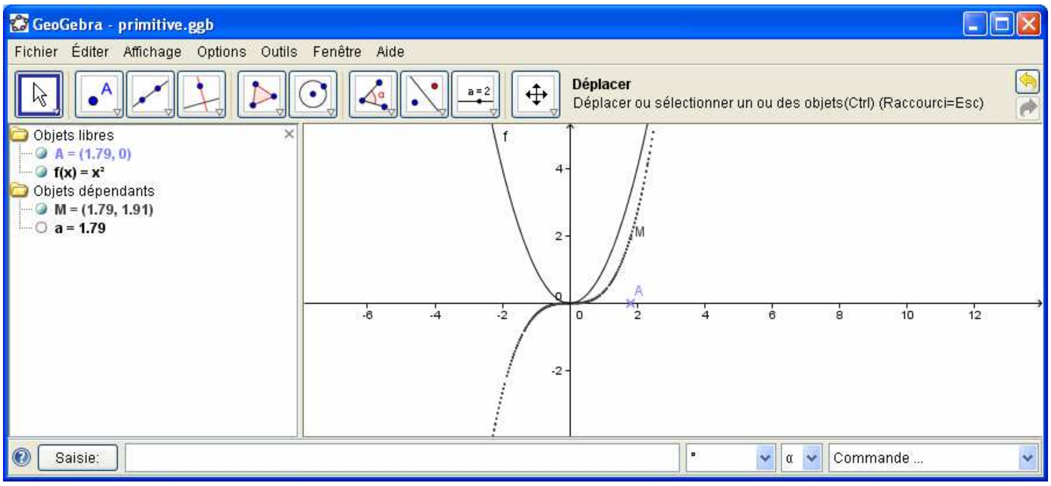
La fonction F est définie sur $[0\,;+\infty[$ par $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Créer un point A sur l'axe des abscisses et noter a son abscisse.

- Saisir *a=x(A)*

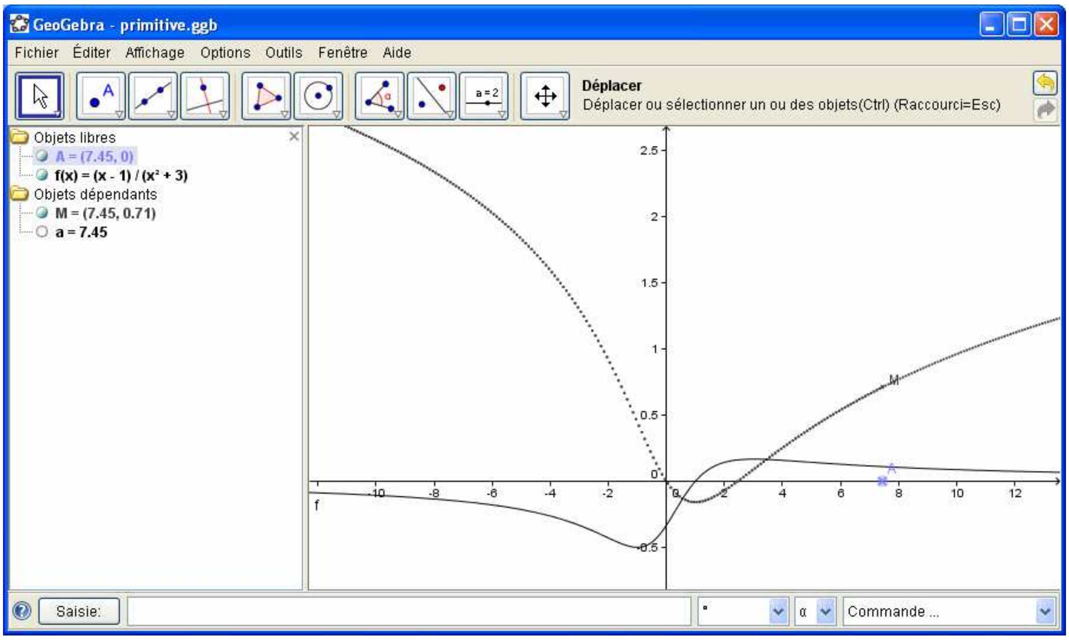
b. Création de la courbe représentative de la fonction F.

- Construire la courbe représentative d'une fonction *f*, par exemple, saisir : *f(x)=x^2*.
- Saisir *M=(a , integrale[f , 0 , a])*
- Activer la trace du point M et afficher cette trace en déplaçant le point A.



[2] Le fichier ***primitive*** à réaliser est téléchargeable sur le site r2math.

- Pour obtenir la représentation graphique d'une primitive d'une autre fonction *f*, il suffit de modifier l'expression analytique de *f* par un clic droit sur la courbe représentative de *f* ou sur sa description dans la fenêtre *Algèbre*, commande *Redéfinir*.



2. Utilisation d'un environnement numérique de travail

Il va falloir préparer les élèves à ce type d'épreuve pratique. Nos horaires et nos moyens étant ce qu'ils sont, quelques devoirs *maison* seront certainement utiles.

Aussi, il nous a semblé intéressant d'informer ceux qui ne le sauraient pas, qu'il existe à notre disposition un environnement de travail collaboratif personnalisé pour les apprenants de l'enseignement agricole public.

Cet environnement, appelé EVA (Espace Virtuel de l'Apprenant, www.cript-ca.com) est un environnement personnel de travail accessible depuis n'importe quel navigateur internet.

Ce système :

- permet aux utilisateurs référencés, établissements, région, etc. de mettre en relation toute la communauté via un annuaire unique ;
- propose des outils nécessaires pour échanger et travailler avec les enseignants et les élèves d'une même classe.

16e RMT - Un œil sur nos âges (CAT. 8, 9, 10)
La mère dit à son fils qui vient de fêter son anniversaire :
« Je constate que ton âge et le mien s'expriment maintenant avec les deux mêmes chiffres. Et ce qui est remarquable, c'est que ton âge, aujourd'hui, est le produit des deux chiffres de l'âge que j'avais lorsque tu es né. »

Quel âge peuvent bien avoir la mère et son fils aujourd'hui ?

Expliquez votre raisonnement.

Compte-rendu

Deux collègues du groupe Py-Math dont les élèves ont passé l'épreuve pratique de mathématiques au mois de juin 2008 proposent un compte-rendu de leur expérience.

	Lycée X (16 élèves)	Lycée Y (18 élèves)
Organisation de la journée	L'épreuve pratique de mathématiques s'est déroulée en parallèle avec celle de physique. Les deux groupes de la classe ont alterné les deux épreuves de mathématiques et de physique sur les deux demi-journées.	L'épreuve s'est déroulée pendant une journée de cours.
Tirage au sort des sujets	Chaque groupe est constitué de 8 élèves. Pour chaque demi-journée, deux sujets ont été choisis au préalable par les enseignants. Les élèves tirent une semaine avant l'épreuve au hasard et sans remise 8 numéros d'anonymat parmi 8. Exemple : N° 16823401, les deux derniers chiffres correspondent au numéro du sujet. L'horaire de passage des sujets a été fixé à l'avance. <u>Exemples</u> : sujet 01 : 8h – 9h; sujet 02 : 10h - 11h. Les élèves ont été convoqués individuellement par le lycée.	Cinq sujets ont été choisis. Les élèves tirent au hasard et sans remise 18 numéros parmi 20. À chaque sujet était attribué quatre numéros et un horaire de passage. Exemple : les numéros 3, 11, 13 et 23 correspondaient au sujet 6 dont l'horaire de passage était 8h – 9h.
Équipe de professeurs	Les enseignants de la classe ont organisé l'épreuve (rôle d'un chef de centre) en ce qui concerne le choix des sujets et la préparation des grilles d'observation.	
	Le travail a été fait en collaboration avec l'examinateur, un enseignant du lycée qui n'avait encore jamais enseigné dans la filière S. L'enseignant TIM était également convoqué pour surveiller et résoudre les éventuels problèmes techniques.	Le travail a été fait en collaboration avec des enseignants d'un lycée voisin.
TICE utilisées	GEOPLAN, GEOGEBRA, GEOSPACE, EXCEL, OPENOFFICE et calculatrice.	
Difficultés des élèves	Les élèves ne maîtrisent pas certaines fonctions des logiciels, en particulier pour le tableur (références absolue et relative, fonction ALEA, fonction NB.SI). D'autre part, les élèves ont eu des difficultés pour rédiger la partie écrite. Notamment, lorsqu'il fallait ne donner que la démarche ou une méthode, les élèves se sont engagés dans une rédaction détaillée et ont manqué de temps.	
Nos impressions personnelles	Les sujets étaient de difficultés inégales. Dans certains cas, la partie pratique pouvait être très rapidement réalisée et l'épreuve se ramenait alors à un exercice écrit classique. Il est difficile pour un examinateur qui n'enseigne pas dans la filière d'évaluer les candidats. Dans tous les cas, cette épreuve a permis aux élèves d'approfondir leurs révisions.	