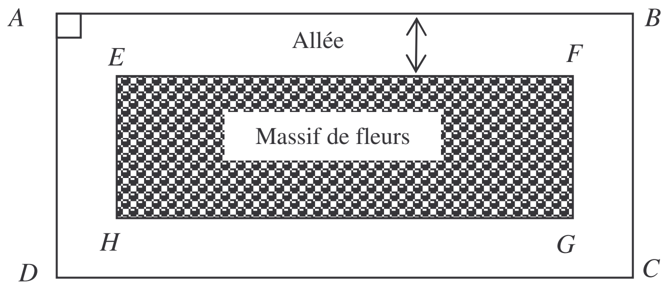
Proposition de correction d'une partie de l'épreuve terminale de mathématiques en filière BEPA (session France 2007)

Extrait du sujet :

Exercice 2 (8,5 points)

Dans une parcelle rectangulaire *ABCD*, le pépiniériste souhaite faire un massif de fleurs rectangulaire *EFGH* entouré d'une allée de largeur constante.

$AB = 15$ m
$AD = 10$ m



Partie 1 :

On suppose que l'allée a une largeur d'un mètre.

1. Calculer l'aire de la parcelle *ABCD*.
2. Calculer l'aire du massif *EFGH*.
3. En déduire l'aire de l'allée.

Partie 2 :

On suppose maintenant que l'allée a une largeur notée x (exprimée en mètres), où x appartient à l'intervalle [0,5 ; 5].

1. Montrer que l'aire $\mathcal{A}(x)$ du massif *EFGH* en fonction de x, est égale à :
   $\mathcal{A}(x) = 4x^2 - 50x + 150$
2. On veut déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du massif *EFGH* est égale à la moitié de l'aire de la parcelle *ABCD*.
   a) Justifier que cette question conduit à résoudre l'équation :
   $$4x^2 - 50x + 75 = 0.$$
   b) Résoudre algébriquement cette équation et conclure après avoir arrondi les solutions au centième près.
3. On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle [0,5 ; 5] respectivement par :
   $f(x) = 4x^2$ et $g(x) = 50x - 75$

   La représentation graphique de f est fournie en **annexe 1**.

   a) Construire la représentation graphique de la fonction g sur l'intervalle [0,5 ; 5] dans le repère de l'**annexe 1**.

   b) Résoudre graphiquement l'équation :
   $$4x^2 = 50x - 75$$
   c) Interpréter le résultat précédent.

Exercice 3 **(7 points)**

On considère les droites (D_1), (D_2) et (D_3) représentées dans le repère orthonormal fourni en **annexe 2**.

Partie 1 : ***Lecture graphique***

À l'aide du graphique et en laissant apparents les tracés utiles à la compréhension de votre raisonnement, répondre aux questions suivantes :

1. Donner les coordonnées du point d'intersection A de (D_2) et (D_3).
2. Donner le coefficient directeur de la droite (D_1).
3. Après avoir déterminé l'ordonnée à l'origine, déduire l'équation réduite de (D_1).
4. Un élève affirme : « Le coefficient directeur de (D_2) est égal à 0. »
   Justifier que cette affirmation est exacte.
5. Cet élève hésite entre trois possibilités pour l'équation réduite de (D_2) :
   a) $y = 3x$ **b)** $y = 3$ **c)** $x = 3$
   Déterminer laquelle de ces équations réduites est celle de (D_2). Rédiger votre raisonnement.

Partie 2 : ***Tracé de droite***

1. Sur le graphique donné en **annexe 2**, construire la droite (D_4) passant par l'origine O du repère et de coefficient directeur (-2).

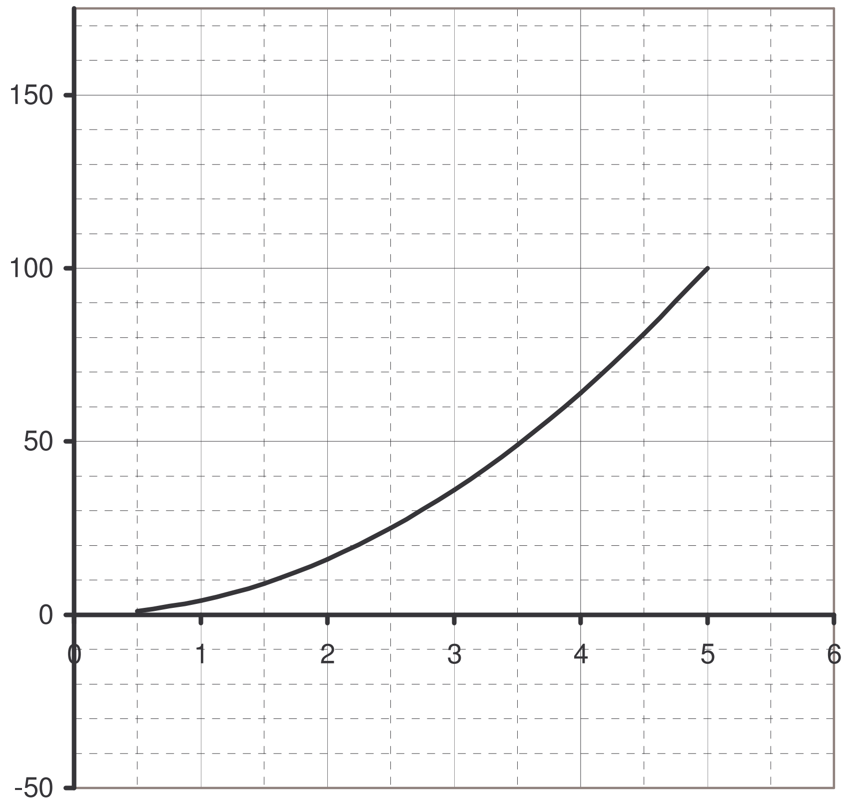
On admet que l'équation réduite de (D_3) est : $y = \frac{1}{2}x + 1$

2. Démontrer que la droite (D_3) est perpendiculaire à la droite (D_4).

ANNEXE 1 (à compléter et à rendre avec la copie)

Exercice 2 - Partie 2

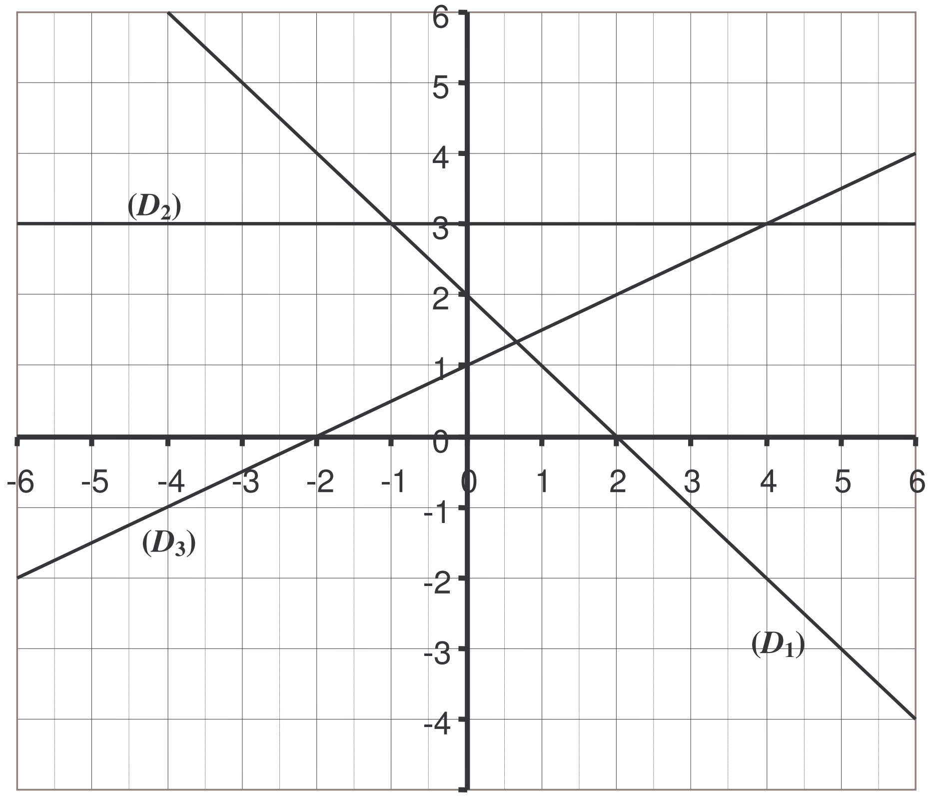
Courbe de la fonction f



ANNEXE 2 (à compléter et à rendre avec la copie)

Exercice 3

Tracé des droites (D_1), (D_2) et (D_3)



Proposition de corrigé :

Exercice 2

Partie 1 :

1. *Calcul de l'aire $\mathcal{A}_1$ de la parcelle ABCD :*

$\mathcal{A}_1 = AB \times AD$

$\mathcal{A}_1 = 15 \times 10$

$\mathcal{A}_1 = 150$

La parcelle *ABCD* a une aire de 150 m².

2. *Calcul de l'aire $\mathcal{A}_2$ du massif EFGH :*

$EF = 13$ et $EH = 8$

$\mathcal{A}_2 = EF \times EH$

$\mathcal{A}_2 = 13 \times 8$

$\mathcal{A}_2 = 104$

Le massif *EFGH* a une aire de 104 m².

3. *Calcul de l'aire $\mathcal{A}_3$ de l'allée :*

$\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2$

$\mathcal{A}_3 = 150 - 104$

$\mathcal{A}_3 = 46$

L'allée a une aire de 46 m².

Partie 2 :

1. *Expression de l'aire $\mathcal{A}(x)$ du massif* EFGH *en fonction de x :*

Lorsque l'allée a une largeur notée x, on déduit que :

$EF = AB - 2x$

$EF = 15 - 2x$

$EH = AC - 2x$

$EH = 10 - 2x$

Contact : Conf PY-MATH@educagri.fr

Il vient alors :
$\mathcal{A}(x) = EF \times EH$
$\mathcal{A}(x) = (15-2x)\times(10-2x)$
$\mathcal{A}(x) = 150-30x-20x+4x^2$
$\mathcal{A}(x) = 4x^2-50x+150$
Ainsi, on a bien démontré que l'aire $\mathcal{A}(x)$ du massif est égale à l'expression proposée dans l'énoncé.

2. *Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du massif EFGH est égale à la moitié de l'aire de la parcelle ABCD.*

a) *Justifier que cette question conduit à résoudre une équation donnée :*

Il s'agit donc de résoudre l'équation suivante, en utilisant les notations de l'énoncé et de la partie 1 :

$\mathcal{A}(x) = 0{,}5 \times \mathcal{A}_1$
$4x^2-50x+150 = 75$ d'après ce qui précède
$4x^2-50x+75 = 0$

La résolution de cette question conduit bien à la résolution de l'équation proposée dans l'énoncé.

b) *Résoudre algébriquement cette équation et conclure après avoir arrondi les solutions au centième près.*

L'équation est de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=4$, $b=-50$ et $c=75$.
Le discriminant de l'équation est Δ :

$\Delta = b^2-4ac$
$\Delta = (-50)^2-4\times4\times75$
$\Delta = 2\,500-1\,200$
$\Delta = 1\,300$
$\Delta = 10\sqrt{13}$

Comme $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-(-50)-10\sqrt{13}}{2\times4}$ et $x_2 = \dfrac{-(-50)+10\sqrt{13}}{2\times4}$

$x_1 = \dfrac{50-10\sqrt{13}}{8}$ et $x_2 = \dfrac{50+10\sqrt{13}}{8}$

$x_1 \simeq 1{,}74$ et $x_2 \simeq 10{,}76$ au centième près

Or on cherche une solution dans l'intervalle $[0{,}5\,;5]$, donc il y a une seule solution possible : x_1.
Ainsi, l'aire du massif *EFGH* est égale à la moitié de l'aire de la parcelle *ABCD*, lorsque la largeur de l'allée est d'environ 1,74 m.

3. **a)** *Construire la représentation graphique de la fonction g sur l'intervalle [0,5 ; 5] dans le repère de l'**annexe 1**.* *(voir page suivante)*

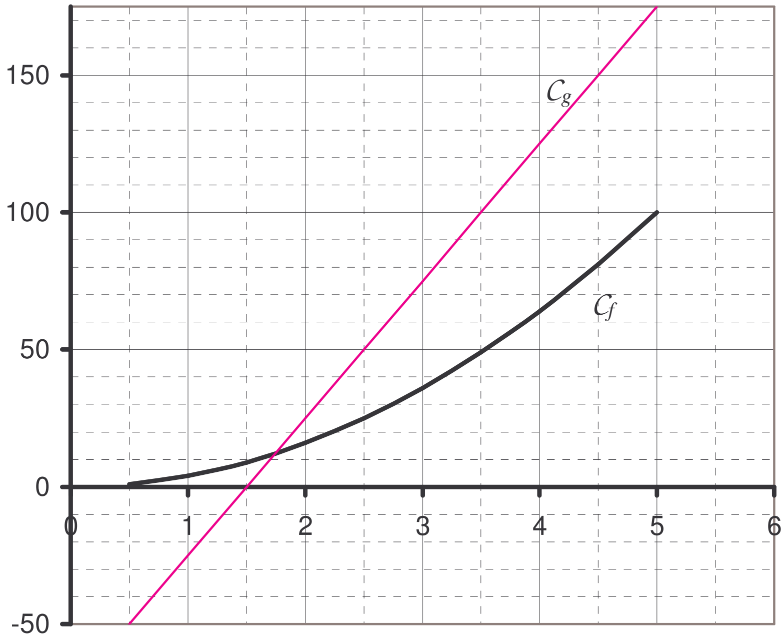
La fonction g est une fonction affine, sa représentation graphique est une droite. Pour la construire, on utilise le tableau de valeurs suivant :

x	2	4
$g(x)$	25	125

$g(2) = 50\times2-75 = 100-75 = 25$
$g(4) = 50\times4-75 = 200-75 = 125$

Annexe 1

Courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ représentatives des fonctions f et g



b) *Résoudre graphiquement l'équation :* $4x^2 = 50x - 75$.

La solution est l'abscisse du point d'intersection de la droite et de la courbe.
Avec la précision permise par le graphique, on déduit que cette équation a pour unique solution dans l'intervalle [0,5 ; 5], le réel 1,7

c) *Interpréter le résultat précédent.*

Résoudre $4x^2 = 50x - 75$ équivaut à résoudre $4x^2 - 50x + 75 = 0$.
Sur [0,5 ; 5], on retrouve graphiquement ainsi le seul résultat plausible établi dans la question 2 b).

<u>Exercice 3</u>

Partie 1

1) Le point A a pour coordonnées (4 ; 3).

2) En utilisant « la méthode de l'escalier », quand on avance horizontalement vers la droite de 1 unité, on descend de 1 unité verticalement, donc le coefficient directeur de (D_1) vaut -1.

3) L'ordonnée à l'origine de (D_1) est l'ordonnée du point d'intersection de la droite (D_1) et de l'axe des ordonnées. On lit : 2.

Équation réduite de (D_1) :

Comme la droite (D_1) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, son équation réduite est de la forme $y = ax + b$ avec $a = -1$ et $b = 2$ (d'après les questions précédentes).

Autrement dit l'équation réduite de (D_1) est : $y = -x + 2$.

4) La droite (D_2) est horizontale, par suite son coefficient directeur est égal à zéro.

5) Comme (D_2) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, l'équation réduite de (D_2) est de la forme $y = ax + b$.

D'après la question précédente $a = 0$ il vient donc : $y = 0x + b$ soit $y = b$.

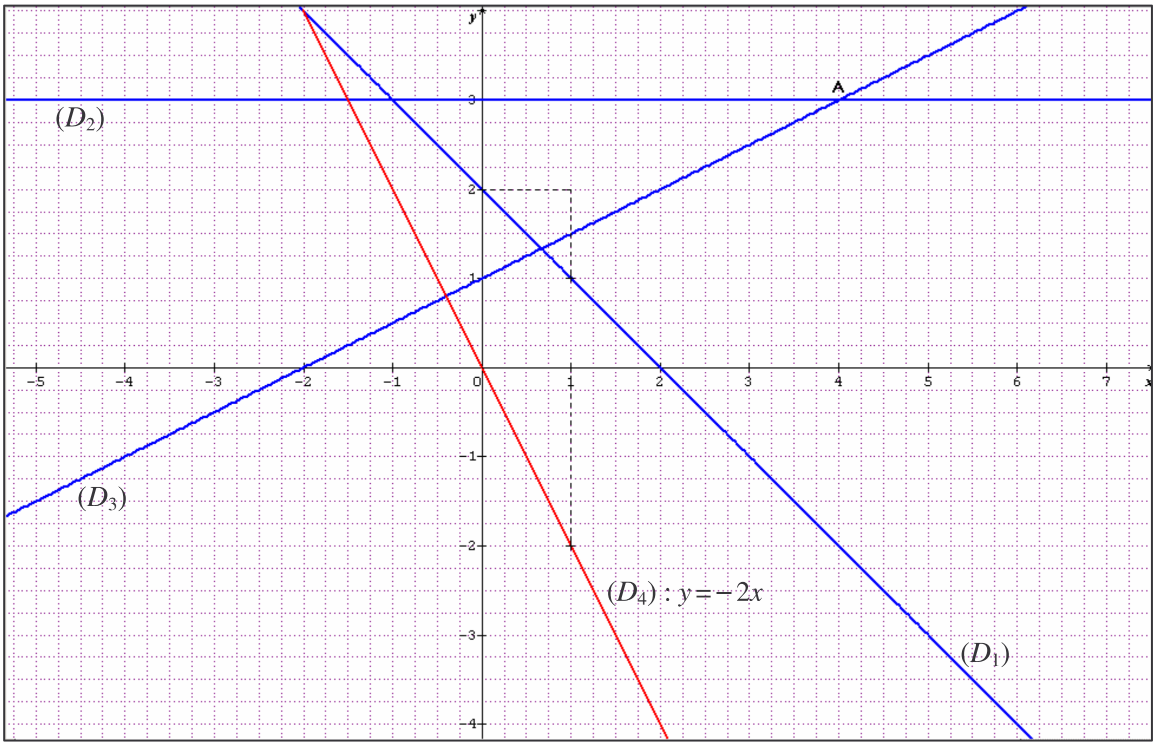
La seule réponse possible est donc : $y = 3$.

Partie 2

1) « Méthode de l'escalier »

2) Calcul du produit des coefficients directeurs : $-2\times\frac{1}{2}=-1$.

Conclusion : Le repère étant orthonormal et le produit des coefficients directeurs des droites étant égal à -1, les deux droites sont perpendiculaires.



Remarque : Les graphiques du sujet ont été réalisés avec le tableur-grapheur Excel et ceux de la proposition de correction avec le logiciel gratuit SINE QUA NON.

16[e] RMT - La récolte des olives (CAT. 9, 10)

Dans le parc de l'école professionnelle de Riva, il y a une grande oliveraie, cultivée par les élèves des classes A et B. Le temps de la récolte est désormais arrivé.

Lundi matin, la classe A de 12 élèves a commencé le travail et a récolté $\frac{1}{6}$ de toutes les olives en 4 heures exactement.

Mardi, pendant la même durée la classe B a récolté $\frac{1}{4}$ de toutes les olives.

Chaque élève, de chacune des deux classes, a récolté la même quantité d'olives.
Mercredi, l'enseignant, qui a entendu dire que le mauvais temps allait arriver, demande aux élèves des deux classes de terminer la récolte ensemble, en travaillant au même rythme que les jours précédents.

Combien y a-t-il d'élèves dans la classe B ?

Combien de temps faudra-t-il aux élèves, tous ensemble, pour terminer la récolte le mercredi ?