Efficacité d'une carte de contrôle de la moyenne

Les cartes de contrôle ont pour objectif de détecter l'apparition de causes anormales, dites *assignables*, qui affectent la tendance centrale et/ou la variabilité du procédé.
Une fois détectée, on peut procéder à l'élimination de la cause ou à l'élimination de ses effets par un recentrage du procédé sur la valeur cible.

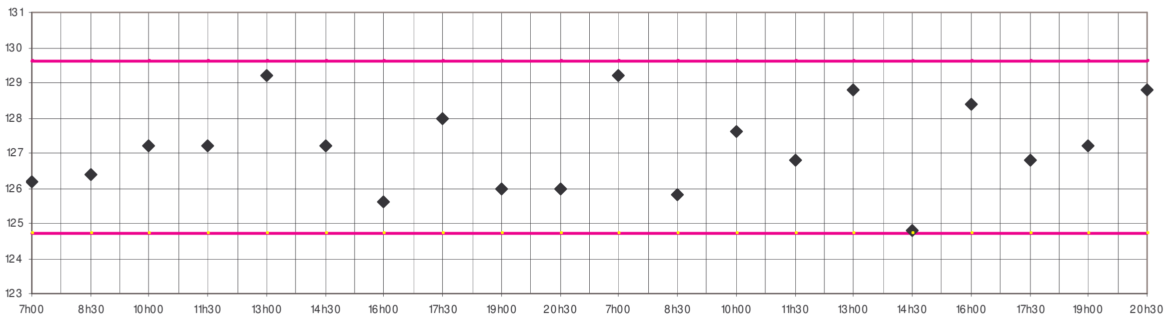
Limite supérieure de contrôle (LSC) et limite inférieure de contrôle (LIC).

On supposera dans la suite que le caractère contrôlé X est distribué selon la loi normale $\mathcal{N}(\mu_0\,;\sigma_0)$ où μ_0 (resp. σ_0) représente la moyenne (resp. l'écart-type) de *X* lorsque le procédé n'est pas déréglé. Les valeurs cibles ou de référence μ_0 et σ_0 sont connues ou fixées.

Les cartes de contrôle sont des quadrillages gradués, pour l'axe horizontal de façon chronologique et pour l'axe vertical selon les valeur prises par le paramètre du caractère *X* (moyenne, écart-type...). Elles traduisent graphiquement un test d'hypothèse bilatéral, par exemple pour la moyenne, de l'hypothèse nulle $\mu = \mu_0$ contre l'hypothèse alternative $\mu \neq \mu_0$. On indique deux lignes horizontales correspondant aux valeurs limites de la moyenne $\overline{X}$ d'un échantillon au-delà desquelles la conclusion du test est le rejet de l'hypothèse nulle.

Ces limites sont appelées *limite supérieure de contrôle* (LSC) et *limite inférieure de contrôle* (LIC).

On prélève des échantillons à intervalles de temps réguliers et on reporte sur le graphique la valeur de la moyenne de l'échantillon.



Carte de contrôle de la moyenne

Si on décide de prendre un risque de fausse alarme égal à 0,27 % ($\alpha = 0{,}0027$), alors quand il n'y a pas de déréglage du procédé $P\left(\text{LSC} \leq \overline{X} \leq \text{LIC}\right) = 0{,}9973$ et les caractéristiques de la carte de contrôle de la moyenne sont les suivantes[1] :

Limite supérieure de contrôle (LSC) : $\mu_0 + 3\,\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$.

Limite inférieure de contrôle (LIC) : $\mu_0 - 3\,\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$.

[1] Pour de plus amples informations concernant la carte de contrôle de la moyenne, vous pouvez consulter le bulletin n° 10 du GRES à l'adresse suivante : http://www.enfa.fr/r2math

Efficacité d'une carte de contrôle

On peut mesurer l'efficacité d'une carte de contrôle en utilisant la probabilité de ne pas détecter un déréglage lors du prélèvement d'un échantillon de taille n. L'efficacité de la carte est d'autant plus grande que cette probabilité est faible.

Lorsque le procédé ne fonctionne pas correctement, la moyenne peut varier et elle prend alors comme valeur μ. On note c l'expression du déréglage de la moyenne en nombre d'écarts-types : $c = \dfrac{\mu - \mu_0}{\sigma_0}$ et ρ le coefficient de déréglage de l'écart-type, $\rho = \dfrac{\sigma}{\sigma_0}$.

Soit P(c) la probabilité de ne pas détecter un déréglage de c écarts-types (avec la carte $\overline{\mathrm{X}}$) lors du prélèvement d'un échantillon de n pièces.

On montre que $\mathrm{P}(c) = F\left(\dfrac{-c\sqrt{n}+3}{\rho}\right) - F\left(\dfrac{-c\sqrt{n}-3}{\rho}\right)$ (cf. démonstration n°1), F étant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

De plus, $\mathrm{P}(-c) = F\left(\dfrac{c\sqrt{n}+3}{\rho}\right) - F\left(\dfrac{c\sqrt{n}-3}{\rho}\right) = 1 - F\left(\dfrac{-c\sqrt{n}-3}{\rho}\right) - 1 + F\left(\dfrac{-c\sqrt{n}+3}{\rho}\right)$

$$\mathrm{P}(-c) = F\left(\frac{-c\sqrt{n}+3}{\rho}\right) - F\left(\frac{-c\sqrt{n}-3}{\rho}\right) = \mathrm{P}(c)$$

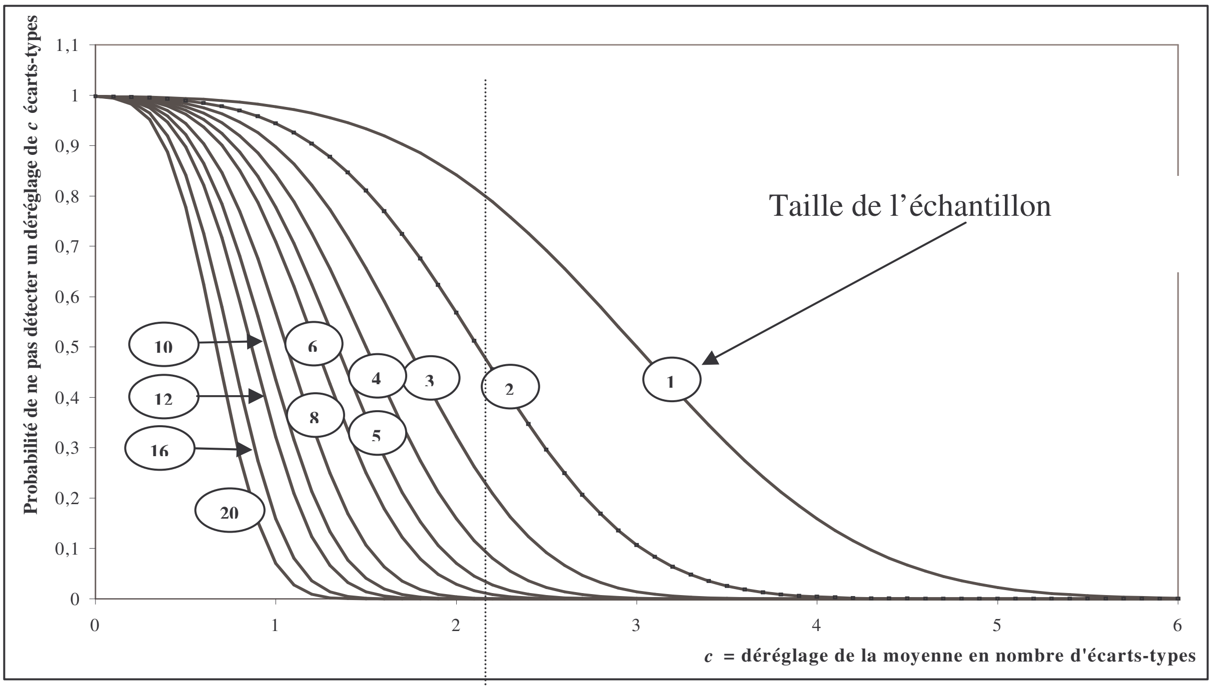
Ainsi par la suite, on considèrera que $c \geq 0$.

On supposera également que $\rho \geq 1$, on néglige ainsi le déréglage de l'écart-type lorsque celui-ci diminue (il est alors favorable à la fabrication).

Si le déréglage du procédé affecte uniquement la moyenne :

$$\rho = 1 \text{ et } \mathrm{P}(c) = F\left(-c\sqrt{n}+3\right) - F\left(-c\sqrt{n}-3\right).$$

Représentons les variations de P pour différentes valeurs de n :

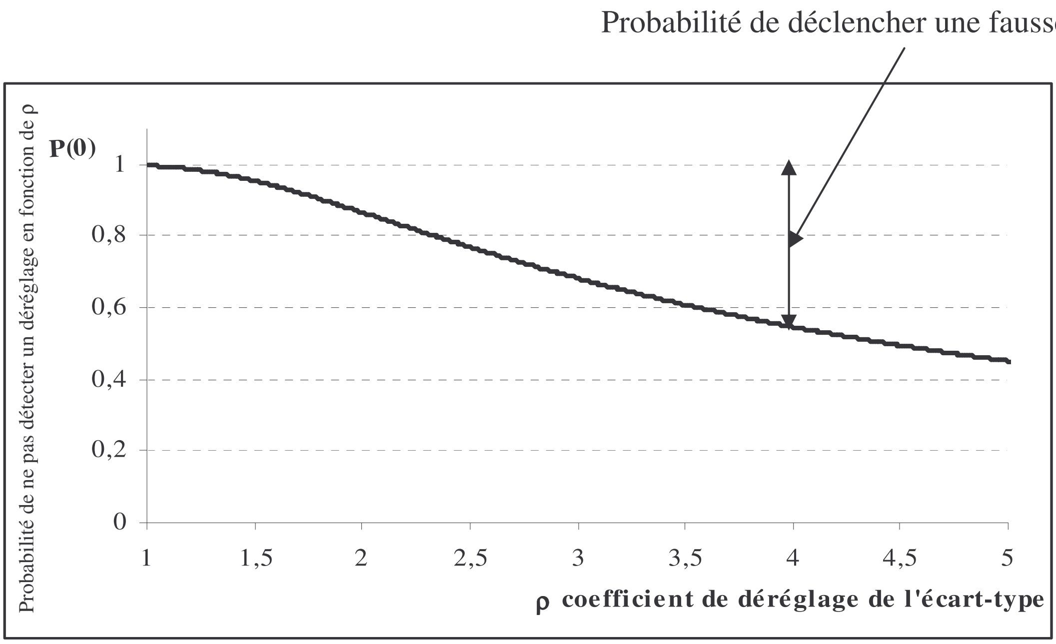


Courbes d'efficacité d'une carte de contrôle de la moyenne

La carte de la moyenne est efficace pour détecter des déréglages de la moyenne du procédé à condition que la taille de l'échantillon soit suffisamment importante.
On constate que si $c = 2$; $\mathrm{P}(c) \leq 0{,}1$ dès que $n \geq 5$ (voir le graphique).

Remarque

Un dérèglage du procédé peut se traduire par une augmentation de l'écart-type. Si le déréglage du procédé affecte uniquement l'écart-type, alors $c = 0$ et la probabilité de ne pas détecter un déréglage est indépendant de la taille de l'échantillon. Cette probabilité est en effet $\mathrm{P}(0) = F\left(\frac{3}{\rho}\right) - F\left(\frac{-3}{\rho}\right) = 2\,F\left(\frac{3}{\rho}\right) - 1$. Calculons P(0) pour différentes valeurs de ρ.
Attention, comme $c = 0$, il n'y a pas de déréglage sur la moyenne. La probabilité $1 - \mathrm{P}(0)$ est donc la probabilité que la moyenne de l'échantillon prélévé soit au-dessus de LSC ou en dessous de LIC. C'est donc en fait la probabilité de déclencher une fausse alerte.



La carte de contrôle de la moyenne a une efficacité très faible lorsque le déréglage affecte l'écart-type. Sur le graphique ci-dessus, on peut lire que lorsque $\rho = 4$ la probabilité de déclencher une fausse alerte est de l'ordre de 0,5.
Si l'on souhaite détecter des déréglages de l'écart-type, il est conseillé de mesurer la dispersion, de temps à autre, à partir d'un échantillon de taille suffisamment importante.

Une autre façon de mesurer l'efficacité de la carte de contrôle de la moyenne est de calculer la *Période Opérationnelle Moyenne* (POM).
Il s'agit du nombre moyen de contrôles effectués et donc de points placés sur la carte entre le moment où un déréglage donné se produit et l'instant où la carte de contrôle le signale. C'est le nombre moyen d'échantillons successifs conduisant au premier point hors limites, pour un déréglage donné.

Nous allons voir les formules de calcul permettant de déterminer la POM pour une carte contrôle de la moyenne.
Si on note N la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de points à représenter sur la carte de la moyenne (lorsqu'un déréglage d'amplitude c se produit) avant d'observer une alarme (alarme comprise) alors :

$$\mathrm{P}(N = i) = \mathrm{P}(c)^{i-1} \times (1 - \mathrm{P}(c)) \text{ pour } i \in \mathbb{N}^*.$$

Cette formule n'est valable que si on suppose que les observations successives sont indépendantes.
De plus cette probabilité est basée sur l'hypothèse qu'un déréglage de la moyenne se traduit par un passage de cette dernière de μ_0 à $\mu_0 + c\,\sigma_0$, niveau auquel elle reste jusqu'à ce qu'une action corrective soit réalisée auquel cas elle revient à μ_0. Ces deux hypothèses ne sont pas toujours réalistes !

La POM(c) est l'espérance mathématique de la variable aléatoire N.

$\mathrm{POM}(c) = \mathrm{E}(N) = \sum_{i=1}^{+\infty} i \times \mathrm{P}(N=i) = \dfrac{1}{1-\mathrm{P}(c)}$ (cf démonstration n°2) .

Ainsi, $\mathrm{POM}(0) = 370$ (à l'unité près), cela signifie qu'en l'absence de déréglage de la moyenne ($c = 0$), il y a en moyenne 370 échantillons prélevés entre deux fausses alarmes et il faut placer en moyenne 370 points successifs sur la carte de la moyenne avant qu'apparaisse un point hors des limites, créant de ce fait une fausse alarme, en effet, même si le procédé fonctionne correctement, certains des échantillons (rares, 0,27 % d'entre eux) conduiront à des valeurs hors limites.

La POM(c) n'est qu'une moyenne, il se peut qu'il faille prélever plus d'échantillons avant de détecter le problème et donc placer beaucoup plus de points sur la carte de contrôle avant de détecter le problème.

La *Période Opérationnelle Maximale* (POMAX) est le nombre maximal de points successifs nécessaires pour déceler au moins 95 % des déréglages.
On peut montrer que $\mathrm{P}(N > k) = \mathrm{P}(c)^k$ (cf démonstration n°3) par conséquent, $\mathrm{P}(N > k) \leq 0{,}05$ est équivalent à dire que $k \geq \dfrac{\log(0{,}05)}{\log(\mathrm{P}(c))}$. Le nombre entier le plus proche de k par valeur supérieure est la POMAX.
Le nombre de contrôles nécessaires avant de détecter un déréglage ne dépasse la POMAX que dans moins de 5 % des cas.

Exercices

Exercice n°1

Supposons qu'un processus de fabrication est sous contrôle statistique et qu'alors, le caractère X contrôlé a une moyenne $\mu_0 = 14$ et un écart-type $\sigma_0 = 2$. On suppose de plus que X est distribué normalement. On utilise une carte de la moyenne avec des échantillons de taille 5.

1. Déterminez les LIC et LSC d'une carte de contrôle $\overline{\mathrm{X}}$ si le risque de déclarer déréglé le processus sous contrôle est égal à 0,0027.

Réponse : $\mathrm{LIC} = \mu_0 - 3\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = 14 - 3 \times \dfrac{2}{\sqrt{5}} \approx 11{,}32$ (à 0,01 près)

$\mathrm{LSC} = \mu_0 + 3\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = 14 + 3 \times \dfrac{2}{\sqrt{5}} \approx 16{,}68$ (à 0,01 près).

Si le processus de fabrication est sous contrôle alors 99,73 % des moyennes des échantillons se situent entre 11,32 et 16,68.

2. Si la moyenne subit un déréglage de 2,2 unités, quelle est la probabilité que la moyenne du prochain échantillon soit située à l'extérieur des limites de contrôle ? Interprétez ce résultat.

Réponse : Il s'agit de déterminer la probabilité de détecter, à l'aide d'un prélèvement d'un échantillon de taille 5, un déréglage de la moyenne égale à $c = \frac{2{,}2}{2} = 1{,}1$ écart-type.

C'est $1 - \mathrm{P}(1{,}1)$ où $\mathrm{P}(1{,}1) = F(-1{,}1\sqrt{5} + 3) - F(-1{,}1\sqrt{5} - 3)$ où F est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

On en déduit que $\mathrm{P}(1{,}1) \approx 0{,}7055$ à 0,0001 près. Par conséquent la probabilité de détecter le déréglage de 1,1 écart-type à l'aide d'un échantillon de taille 5 est égale à 0,2945.

3. Déterminez la POM(1,1) et la POMAX. Interprétez le résultat.

Réponse : $\mathrm{POM}(1{,}1) = \dfrac{1}{1 - \mathrm{P}(1{,}1)} \approx 3{,}4$ (à 0,1 près).

Il faudra en moyenne 3,4 contrôles successifs avant de déceler, à l'aide de la carte de la moyenne, le fait que μ s'est dérèglée de 2,2 unités.

$\dfrac{\log(0{,}05)}{\log(\mathrm{P}(1{,}1))} \approx 8{,}59$ à 0,01 près. Donc $\mathrm{POMAX} = 9$.

Il y a une probabilité inférieure à 0,05 qu'il faille plus de 9 contrôles successifs pour déceler un déréglage de la moyenne de 2,2 unités à l'aide de la carte de la moyenne.

Exercice n°2 :

On cherche à mettre en place une carte de contrôle de la moyenne pour le suivi de la tendance centrale d'un procédé. Les paramètres du procédé stable sont $\mu_0 = 135$ et $\sigma_0 = 0{,}001$.
Quelle est doit être la taille n de l'échantillon, si l'on désire une probabilité de fausse alarme de 0,0027 et une probabilité inférieure à 0,10 de ne pas détecter un déréglage de la moyenne de $+\,0{,}002$ unités à l'aide d'une carte de contrôle ?

Réponse : $c = 2$ et on souhaite que $\mathrm{P}(2) \leq 0{,}10$.

$\mathrm{P}(2) = F(-2\sqrt{n} + 3) - F(-2\sqrt{n} - 3)$ où F est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
Pour $n \geq 1$, on a $F(-2\sqrt{n} - 3) \approx 0$ et on peut considérer que $\mathrm{P}(2) \approx F(-2\sqrt{n} + 3)$.
Pour déterminer n, il faut donc résoudre l'équation suivante : $F(-2\sqrt{n} + 3) \leq 0{,}10$.
En utilisant la table de la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite, $F(-2\sqrt{n} + 3) \leq 0{,}10$ dès que $-2\sqrt{n} + 3 \leq -1{,}282$ donc dès que $n \geq 2{,}141^2$ ce qui est réalisé dès que $n \geq 4{,}58$.
Il faut donc mettre en place une carte de contrôle de la moyenne avec des échantillons de taille $\mathrm{n} \geq 5$. On retrouve ce résultat sur le graphique de la page 57.

Exercice n°3 :

Un procédé de fabrication conditionne des préemballages de produits destinés à la vente par quantité nominale de 100 g.

Du fait de la présence de causes aléatoires dans le procédé de fabrication le poids réel dans chaque préemballage n'est pas toujours exactement de 100 g. On fait l'hypothèse que le poids réel dans chaque préemballage est distribué normalement avec une moyenne μ et un écart-type σ exprimés en grammes.

Une étude préalable a montré que lorsque le procédé est stable l'écart-type σ vaut 1g.

Une balance automatique pèse le contenu de tous les préemballages et éliminent tous ceux dont le poids réel est inférieur à 100 g. Le prix de vente des préemballés pesant plus de 100 g est de 1,02 € alors que ceux qui sont déclassés sont vendus 1 €. De plus le prix de revient du kg est de 1,8 €.

1) Dans un premier temps, déterminer à l'aide d'un tableur la valeur de μ permettant d'optimiser le gain ? On appelle μ_0 cette valeur.

Réponse :

Soit X la variable aléatoire donnant le poids réel en grammes d'un préemballage ; la loi de X est la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;1)$.

Le gain moyen lors de la vente d'un préemballage est égal à :

$$1{,}02\times \mathrm{P}(X\geq 100)+1\times \mathrm{P}(X<100)-18\times 10^{-3}\times\mu$$

Ainsi si on fait varier μ de 95 g à 105 g avec un pas de 0,1 g (à l'aide d'un tableur), on constate que le gain est optimal pour $\mu\approx 101{,}7$ g. On prendra par la suite $\mu_0=101{,}7$ g.

Le décret n°78-166 du 31 janvier 1978 relatif au contrôle métrologique de certains préemballages stipule qu'au plus 2 % des préemballages d'un lot peuvent présenter un manquant supérieur à 4,5 g.

2) Déterminer la valeur de μ correspondant à 2 % de défectueux. On appelle μ_1 cette valeur.

Réponse :

Considérons toujours X la variable aléatoire donnant le poids réel en grammes d'un préemballage ; la loi de X est la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;1)$. On cherche μ de sorte que $\mathrm{P}(X<100-4{,}5)=0{,}02$ ce que revient à $\mathrm{P}(X<95{,}5)=0{,}02$ puis à $F(95{,}5-\mu)=0{,}02$ où F est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Ainsi, soit μ doit être égale à environ $95{,}5+2{,}05=97{,}55$ g. On a alors $\mu_1=97{,}55$ g.

Le responsable qualité de l'entreprise décide de mettre en place une carte de contrôle de la moyenne de valeur centrale $\mu_0=101{,}7$ g. Il décide que cette carte de contrôle doit détecter 99 fois sur 100 la dérive de la moyenne de μ_0 à μ_1.

3) Déterminer la taille minimale des échantillons à prélever pour satisfaire cette condition.

Réponse :

Le déréglage de la moyenne qu'il faut détecter est $c=101{,}7-97{,}55=4{,}15$ écarts-types

On doit avoir $\mathrm{P}(4{,}15)\leq 0{,}01$, mais $\mathrm{P}(4{,}15)=F(-4{,}15\sqrt{n}+3)-F(-4{,}15\sqrt{n}-3)$. Pour $n\geq 1$, on a $F(-4{,}15\sqrt{n}-3)\approx 0$ et on peut considérer que $\mathrm{P}(4{,}15)\approx F(-4{,}15\sqrt{n}+3)$.

Pour déterminer *n,* il faut donc résoudre l'équation suivante : $F(-4{,}15\sqrt{n}+3)\leq 0{,}01$.

ce qui est réalisé dès que $-4{,}15\sqrt{n}+3\leq -2{,}327$ donc dès que $n\geq 1{,}65$.

Il faut donc mettre en place une carte de contrôle de la moyenne avec des échantillons de taille $n=2$.

4) Donner les limites de la carte de contrôle si on prend un risque de fausse alarme de 0,0027.

Réponse :

Ainsi les limites de contrôle de cette carte sont : $\mathrm{LSC}=101{,}7+\dfrac{3}{\sqrt{2}}\approx 103{,}8$ g et $\mathrm{LIC}=101{,}7-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\approx 99{,}6$ g.

Bibliographie :

- *Techniques mathématiques pour l'industrie agroalimentaire* (2002). Jean-Jacques DAUDIN et Camille DUBY (coordinateurs) - Tec&Doc.
- *Appliquer la maitrise statistique des procédés* (2002, 3e édition). Maurice PILLET - Éditions d'Organisation.
- *Contrôle de la qualité* (2002).Luan JAUPI - L'Usine Nouvelle, Dunod.
- *Efficacité des méthodes classiques de contrôle statistique* (1953). CAVÉ - Revue de statistiques appliquée, tome1, n° 3-4, p. 25-43.
- Norme AFNOR NF X 06-031-1 (Décembre 1995) « Cartes de contrôle - partie 1 : Cartes de contrôle de Shewhart aux mesures »

Le coin des démonstrations ...

Démonstration n°1

Si la moyenne s'est déréglée de c écarts-types et que l'écart-type a été multiplié par le facteur ρ, le caractère étudié se distribue selon la loi normale $\mathcal{N}(\mu_0 + c\,\sigma_0\,;\,\rho\,\sigma_0)$ et la moyenne $\overline{X}$ du caractère dans les échantillons selon la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu_0 + c\,\sigma_0\,;\,\frac{\rho\,\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$

On ne détecte pas le déréglage lorsque la moyenne $\overline{X}$ est entre les limites de contrôle ainsi :

$$P(c) = P\left(\mu_0 - 3\,\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \leq \overline{X} \leq \mu_0 + 3\,\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$$

$$P(c) = P\left(\frac{\mu_0 - 3\,\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} - \mu_0 - c\,\sigma_0}{\frac{\rho\,\sigma_0}{\sqrt{n}}} \leq \frac{\overline{X} - \mu_0 - c\,\sigma_0}{\frac{\rho\,\sigma_0}{\sqrt{n}}} \leq \frac{\mu_0 + 3\,\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} - \mu_0 - c\,\sigma_0}{\frac{\rho\,\sigma_0}{\sqrt{n}}}\right)$$

$P(c) = P\left(\frac{-c\sqrt{n} - 3}{\rho} \leq U \leq \frac{-c\sqrt{n} + 3}{\rho}\right)$ où U est distribuée selon la loi normale centrée réduite

$$P(c) = F\left(\frac{-c\sqrt{n} + 3}{\rho}\right) - F\left(\frac{-c\sqrt{n} - 3}{\rho}\right).$$

Démonstration n°2

Il s'agit de démontrer que $\sum_{i=1}^{+\infty} i \times P(N = i) = \frac{1}{1 - P(c)}$ avec $P(N = i) = P(c)^{i-1} \times (1 - P(c))$

Lorsque $0 < q < 1$ on a $\sum_{i=0}^{+\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$ et $\sum_{i=0}^{+\infty} i \times q^{i-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$. Ce dernier résultat s'obtient en dérivant par rapport à q les deux membres de $\sum_{i=0}^{k} q^i = \frac{1 - q^{k+1}}{1-q}$ et en faisant tendre k vers $+\infty$;

Ainsi en remplaçant q par $P(c)$ $(0 \leq P(c) < 1)$,on a : $\sum_{i=0}^{+\infty} i \times (P(c))^{i-1} = \frac{1}{(1 - P(c))^2}$.

On en déduit que : $\sum_{i=1}^{+\infty} i \times P(N = i) = \frac{1 - P(c)}{(1 - P(c))^2} = \frac{1}{1 - P(c)}$.

Démonstration n°3

$$P(N > k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(N=i)$$

$$P(N > k) = (1 - P(c)) \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(c)^{i-1} = (1 - P(c))\, P(c)^k\, (1 + P(c) + P(c)^2 + ...)$$

$$P(N > k) = (1 - P(c))\, P(c)^k \frac{1}{1 - P(c)} \text{ car } 0 \leq P(c) < 1$$

Ainsi $P(N > k) = P(c)^k$.

16e RMT - Un satellite au-dessus de l'équateur (Cat. 9, 10)

L'équateur terrestre mesure environ 40 000 km, à 5 km près. (c'est-à-dire que sa mesure est comprise entre 39 995 km et 40 005 km).

Un satellite artificiel fait le tour de la terre en survolant l'équateur à une altitude précise de 200 km en 2 heures exactement.

Trois chercheurs, Nicolas, Christophe et Georges, ont calculé la distance parcourue par le satellite et sa vitesse quand il effectue un tour complet. Ils ont obtenu les résultats suivants:

Nicolas :	distance : 41 230 km,	vitesse : 20 620 km/h
Christophe :	distance : 41 256 km,	vitesse : 20 627 km/h
Georges :	distance : 41 258 km,	vitesse : 20 635 km/h

Lesquelles de ces mesures sont-elles correctes c'est-à-dire compatibles avec l'approximation sur la mesure de l'équateur ?

Justifiez vos réponses.

16e RMT - Treize à table (Cat. 8, 9, 10)

Au restaurant, c'est la fin d'un repas entre amis. Le garçon apporte l'addition : 192,75 €.
Les treize amis qui ont mangé ensemble décident de partager équitablement les frais.
Julie fait la division sur la calculatrice de son téléphone portable et dit :
« Ça fait 14,82692308. Je propose que chacun mette 15 euros sur la table.
Mathieu, qui sait encore faire des divisions par écrit, griffonne sur un coin de la nappe de papier et dit à Julie :
« Ta calculatrice n'est pas très précise car je trouve 14,82692307, et je n'ai pas fini ».
Antoine, qui est très rapide dans les divisions, dit :
« Mathieu a raison, le 8e chiffre après la virgule est bien 7, et je peux même vous dire, par exemple, quel serait le 2 008e chiffre après la virgule !

Et vous aussi, dites quel est le 2 008e chiffre après la virgule.

Expliquez comment vous l'avez trouvé.