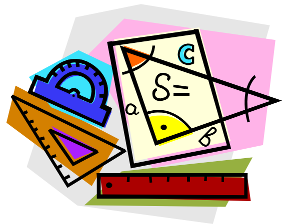
AIRE D'UN TRIANGLE VARIABLE

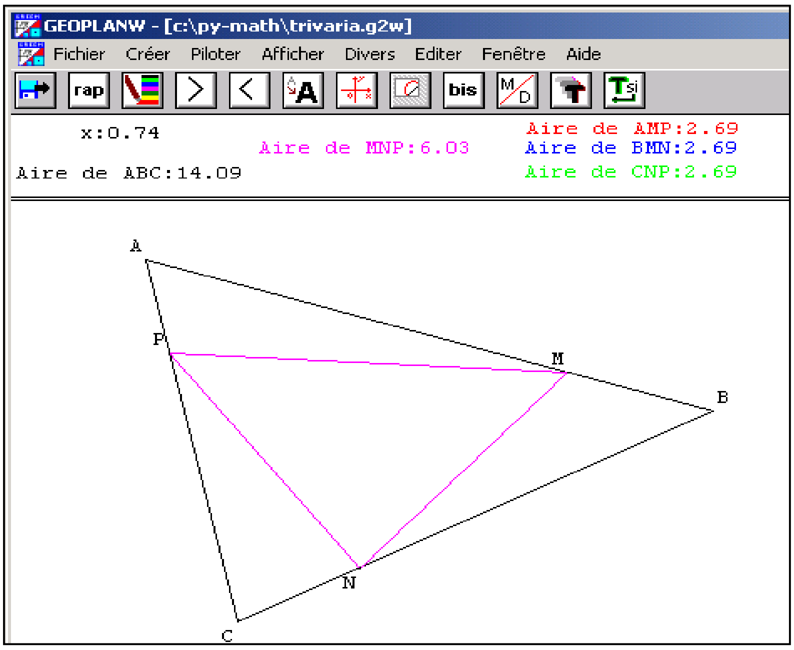
Soit ABC un triangle dont les trois angles sont aigus. On pose AB = c, AC = b et BC = a.
Soit x un nombre réel tel que $0 \le x \le 1$.



On considère trois points M, N et P tels que :

- M appartient à [AB] et AM = x AB,
- N appartient à [BC] et BN = x BC,
- P appartient à [AC] et CP = x CA.

<u>But</u> : lorsque x varie, l'aire S (x) du triangle MNP varie. On se propose de déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle MNP est minimale.



<u>Partie 1</u> : expression de l'aire du triangle MNP en fonction de x

1) Exprimer AM, BN et CP en fonction de a, b, c et x.
2) Notons A_1 l'aire du triangle MNB.
   a) Tracer dans le triangle MNB, la hauteur issue de M. Elle coupe [NB] en H.
   b) Dans le triangle MBH rectangle en H, exprimer MH en fonction de x, c et $\sin \hat{B}$.
   c) Exprimer enfin l'aire A_1 en fonction de a, c, x et $\sin \hat{B}$.
3) De manière analogue, exprimer l'aire A_2 du triangle AMP et l'aire A_3 du triangle PCN.
4) Supposons maintenant que a = 13 , b = 14 et c = 15 , l'unité est le centimètre.
   a) Exprimer A_1, A_2 et A_3 en fonction de x.

b) On peut calculer l'aire S du triangle ABC connaissant la mesure de ses côtés à l'aide de la formule de Héron : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ avec $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ (p est le demi périmètre).

Calculer l'aire S du triangle ABC.

c) Exprimer enfin l'aire S (x) du triangle MNP en fonction de x.

<u>Partie 2</u> : application de l'étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur [0 ; 1] par $f(x) = 252x^2 - 252x + 84$.

1) Déterminer f ' (x), étudier son signe et construire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 1].

2) Pour quelle valeur de x l'aire du triangle MNP est-elle minimale ? Soit x_0 cette valeur.

3) En prenant $x = x_0$:

a) Déterminer l'aire minimale du triangle MNP.

b) Calculer les valeurs exactes de MN, MP et NP.

c) Calculer, au degré près, les mesures des angles $\hat{M}$, $\hat{N}$ et $\hat{P}$ dans le triangle MNP.

Quelques remarques sur cet exercice :

Cette activité peut, bien entendu, se faire sans logiciel de géométrie dynamique. Dans ce cas, on peut demander, par exemple, aux élèves de construire un triangle MNP pour x valant 0,6 ou 1/3.

S(x) désigne l'aire du triangle MNP, si x est différent de 0 et de 1, alors S(x) est strictement positive et strictement inférieure à l'aire du triangle ABC. Il est donc légitime de se poser la question, quel est le minimum de S(x) et pour quelle(s) valeur(s) de x ce minimum est-il atteint.

Enfin le choix de 13, 14 et 15 comme longueur des cotés du triangle ABC n'est pas anodin. En effet, ce sont les valeurs données par Heron pour illustrer l'utilisation de la formule portant son nom. Vous remarquerez qu'avec ces valeurs l'aire du triangle est un entier.
En résumant, on peut dire que le texte de HERON comporte trois parties, dans la première il explique comment extraire une racine carrée, puis il « démontre » sa formule, et enfin donne un exemple d'application qui « tombe juste » ; joli exemple d'illustration du principe « jamais deux difficutés pédagogiques d'un coup ».