Corrigé de l'exercice N°1 du baccalauréat technologique séries STAE-STPA (session 1997 France métropolitaine)

Enoncé:

On considère que 20% des pièces de 10 F qui sont en circulation dans une ville donnée sont fausses.

Dans une laverie de cette ville, les machines à laver fonctionnent avec des pièces de 10 F.

Si une pièce est fausse, la machine la refuse 4 fois sur 5.

Si une pièce est vraie, la machine l'accepte à coup sûr.

1) Si un client met une pièce de 10 F prise au hasard, quelle est la probabilité que cette pièce soit refusée par la machine ?

2) L'une des machines de la laverie nécessite que l'on y mette successivement exactement 5 pièces de 10 F.

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de pièces (sur les 5) rejetées par la machine.

a) Justifier que X suit une loi binomiale de paramètres n=5 et p=0,16

On exprimera les résultats à 10 -3 près :

b) Calculer la probabilité pour qu'aucune pièce ne soit rejetée.

c) Calculer la probabilité pour qu'une pièce soit rejetée.

d) Calculer la probabilité pour qu'au moins deux pièces soient rejetées.

Correction

1) On envisage deux méthodes pour cette première question.

Méthode 1

Compte tenu de l'énoncé, en raisonnant sur un effectif de 100 pièces circulant dans la ville, on sait que 20 pièces sont fausses et 80 sont correctes.

Si une pièce est fausse, la machine la refuse 4 fois sur 5; donc la machine refuse 16 pièces sur les 20 pièces fausses et elle en accepte 4.

Les 80 pièces correctes sont acceptées.

Ces résultats conduisent au tableau suivant :

	Pièces fausses	Pièces correctes	Totaux
Pièces refusées	16	0	16
Pièces acceptées	4	80	84
Totaux	20	80	100

Sur les 100 pièces considérées, le total de pièces refusées est égal à 16. Sur ces 100 pièces on prend une pièce au hasard, la probabilité qu'elle soit refusée est donc égale à 16/100 soit 0,16.

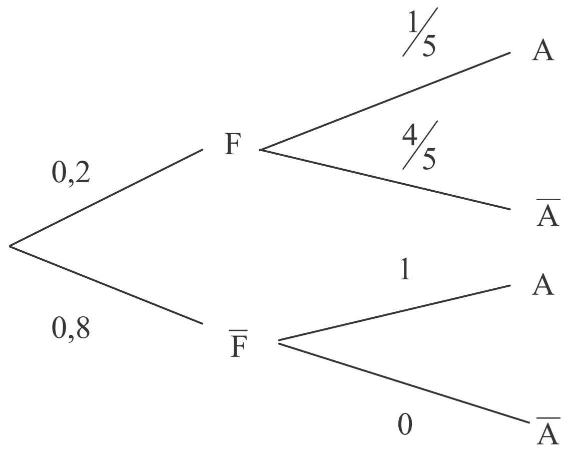
Méthode 2

Epreuve : on prend une pièce de 10 F au hasard parmi celles qui sont en circulation dans la ville. Soit Ω l'univers correspondant à cette épreuve.

Désignons par F l'événement : « la pièce prise est fausse » et par A l'événement « la pièce prise est acceptée » et traduisons les hypothèses de l'énoncé :

$$\begin{cases} p(F)=0{,}2 \quad \text{et donc} \quad p(\overline{F})=0{,}8 \\ p_F(\overline{A})=\dfrac{4}{5} \quad \text{et donc} \quad p_F(A)=\dfrac{1}{5} \\ p_{\overline{F}}(A)=1 \quad \text{et donc} \quad p_{\overline{F}}(\overline{A})=0 \end{cases}$$

Ces hypothèses peuvent être résumées par l'arbre suivant :



Probabilité que la pièce prise au hasard soit refusée par la machine : on a :

$\overline{A} = (F\cap\overline{A})\cup(\overline{F}\cap\overline{A})$ mais $\overline{F}\cap\overline{A} = \varnothing$ car les "bonnes" pièces sont toutes acceptées, donc :

$p(\overline{A}) = p(F\cap\overline{A})$ or $p(F\cap\overline{A}) = p(F)\times p_F(\overline{A})$

$$p(\overline{A}) = 0{,}2\times\frac{4}{5}$$

$p(\overline{A}) = 0{,}16$

La probabilité qu'une pièce de 10 F prise au hasard soit refusée par la machine est donc égale à 0,16.

2) a) L'épreuve consiste à introduire une pièce de 10 F dans la machine. La pièce est refusée avec une probabilité p égale 0,16. Elle est acceptée avec une probabilité q égale à 0,84 (q=1-p).
L'épreuve est répétée 5 fois dans les mêmes conditions et les épreuves sont indépendantes entre elles.
Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de pièces rejetées par la machine parmi les 5 introduites.
Dans les conditions données, la loi de probabilité de la variable X est donc la loi binomiale de paramètres n = 5 et p = 0,16 et la probabilité d'avoir k (k entier tel que $0\leq k\leq 5$) pièces rejetées, notée p(X=k), est égale à :

$$p(X=k) = C_5^k\ 0{,}16^k \times 0{,}84^{5-k}$$

b) La probabilité que la machine ne rejette aucune pièce est p(X=0)
avec $p(X=0)= 1\times0{,}16^0\times0{,}84^5$ soit 0,418 à 10^{-3} près.

c) La probabilité que la machine ne rejette qu'une pièce est p(X=1)
avec $p(X=1)= 5\times0{,}16^1\times0{,}84^4$ soit 0,398 à 10^{-3} près.

d) La probabilité que la machine rejette au moins deux pièces est $p(X\geq2)$
or $p(X\geq2) = 1- [\ p(X=0)+ p(X=1)]$
soit $p(X\geq2) = 0{,}184$ à 10^{-3} près.